МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный университет
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Методические указания по курсу "Электродинамика", раздел: "Теория излучения"

для студентов 3 курса физического факультета
спец. 010400, 071500, 200200 дневного и вечернего отделений

Составители:
проф. С.А. Запрягаев
асс. А.А. Крыловецкий

ВОРОНЕЖ 2001

Общие определения

Скалярный и векторный потенциалы произвольной системы зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (рис. 1) определяются выражениями:

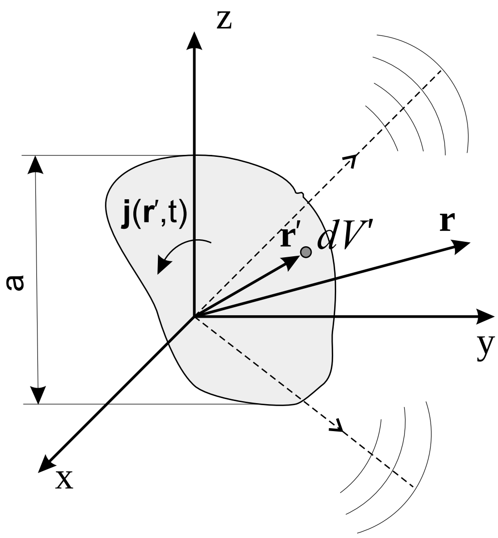

Рис. 1.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \qquad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \dfrac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \qquad (2)$$

Известно [1], что система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитное поле. В соответствии с общей теорией излучения особое значение имеет поле, созданное системой зарядов в волновой зоне или на расстояниях $r \gg c/\omega$. Здесь r - расстояние до точки наблюдения от системы зарядов, ω - частота электромагнитного поля, c - скорость света. Если $r \gg c/\omega \gg a$, где a - характерные размеры системы, векторный потенциал (2) можно разложить в ряд по переменной $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/cr$, что соответствует разложению по малому параметру $a/(c/\omega) \ll 1$. В этом случае первые три члена разложения векторного потенциала имеют вид [1]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr} + \frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(\tau)}{6c^2 r} + \ldots, \qquad (3)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный радиус-вектор точки наблюдения, $\tau = t - r/c$ — время запаздывания, $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы зарядов, $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент системы токов, а $\mathbf{Q}$ — вектор, декартовы компоненты которого определены следующим соотношением:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{3} Q_{ik}\, n_k, \quad i \in 1, 2, 3. \qquad (4)$$

Здесь Q_{ik} — компоненты тензора квадрупольного момента системы, n_k — компоненты единичного радиус-вектора. В выражении (3) точка над функцией обозначает дифференцирование по времени.

Так как в волновой зоне вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ связан с вектором индукции $\mathbf{B}$ равенством $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$, для определения электромагнитного поля достаточно определить вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. В результате:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]}{6c^3 r} + \ldots \tag{5}$$

В произвольной точке волновой зоны плотность потока энергии определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{cB^2}{4\pi}\mathbf{n}. \tag{6}$$

Таким образом, энергия электромагнитного поля, излученная системой в единицу времени по всем направлениям (интенсивность излучения), определяется выражением:

$$I = \oint_S (\mathbf{s} \cdot d\boldsymbol{S}) = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau)}{3c^3} + \frac{\dddot{Q}^2_{\alpha\beta}(\tau)}{180c^5} + \ldots = I_d + I_\mu + I_Q + \ldots \tag{7}$$

Слагаемые в выражении (7) определяют интенсивность электрически-дипольного (E1), магнитно-дипольного (M1) и электрически-квадрупольного излучения (E2), соответственно.

1 Интенсивность электрически-дипольного излучения

В соответствии с (7) интенсивность электрически-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_d(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \tag{8}$$

где $\ddot{\mathbf{d}}$ — вторая производная по времени от дипольного момента системы. Энергия, излученная системой за конечный интервал времени от $t_\text{н}$ до $t_\text{к}$, есть:

$$\mathcal{E} = \int\limits_{t_\text{н}}^{t_\text{к}} I\,dt. \tag{9}$$

Если $t_\text{н} = -\infty$ и $t_\text{к} = +\infty$, выражение (9) определяет полную энергию, излученную системой.

Пример 1.1 *Через конденсатор пролетела частица с массой m и зарядом e. Расстояние между обкладками конденсатора l, а напряжённость электрического поля $\mathbf{E}$ в нём однородна и постоянна. Угол между вектором $\mathbf{E}$ и направлением скорости $\mathbf{v_0}$ частицы при влёте равнялся α (рис. 2). Найти энергию $\mathcal{E}$, теряемую частицей на* *дипольное излучение во время пролёта через конденсатор. (Задача №288 в [2])*

Расположим начало координат в точке влёта частицы в конденсатор. Ось y направим вдоль, а ось x – перпендикулярно пластинам конденсатора (рис. 2). На основании закона Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$. Так как дипольный момент частицы $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, находим $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = e^2\mathbf{E}/m$. Таким образом, на основании (8) для интенсивности дипольного излучения I получим выражение:

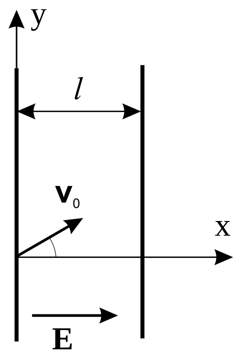

Рис. 2

$$I = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}.$$

По оси x частица движется с постоянным ускорением, равным $a_x = \dfrac{eE}{m}$, а по оси y с постоянной скоростью $v_0 \sin\alpha$. Поэтому из закона движения для координат $x(t)$ и $y(t)$ заряда имеем:

$$x = tv_0 \cos\alpha + \frac{Ee}{2m}t^2, \quad y = tv_0 \sin\alpha\,. \tag{10}$$

Подставляя в (10) $x = l$ и решая квадратное уравнение относительно t, найдем время, в течение которого частица находится в конденсаторе:

$$t_0 = \frac{m}{eE}\left(-v_0\cos\alpha + \sqrt{v_0^2\cos^2\alpha + \frac{2Eel}{m}}\right).$$

Таким образом, энергия, излученная частицей за время пролета через конденсатор, будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = It_0 = \frac{2e^3Ev_0}{3mc^3}\left(\sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2} + \cos^2\alpha} - \cos\alpha\right).$$

Пусть заряд частицы равен заряду электрона, масса — массе электрона, скорость частицы при влете $v_0 = 0,01$, $\alpha = 0°$, напряженность поля $E = 10^5$ В/см, расстояние между обкладками конденсатора равно $l = 1$. В этом случае отношение энергии, потерянной электроном на излучение, к его начальной кинетической энергии $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \sim 10^{-10}$.

Пример 1.2 *Частица с массой m и зарядом e пролетает по диаметру шара радиуса R, внутри которого равномерно распределён заряд Q. Заряды частицы и шара противоположного знака. Перед влётом в шар частица имела кинетическую энергию $\mathcal{E}_0$. Определить энергию $\mathcal{E}$, теряемую частицей на дипольное излучение во время пролёта через шар.(Задача №289 в [2])*

Выберем начало координат в центре шара (рис. 3). Пусть движение происходит вдоль оси x. Напряженность поля и потенциал внутри шара ($r \leqslant R$) равны, соответственно:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3}\mathbf{r}, \qquad \varphi = \frac{3Q}{2R} - \frac{Qr^2}{2R^3}.$$

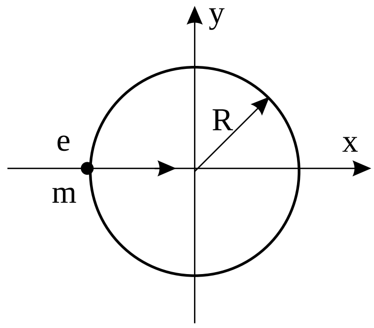

Рис. 3.

Используя уравнение движения $m\ddot{x} = \dfrac{eQx}{R^3}$, на основании (8) и определения дипольного момента частицы $d = ex$ ($\ddot{d} = e\ddot{x}$) найдем интенсивность излучения движущейся частицы:

$$I = \frac{2\ddot{d}^2}{3c^3} = \frac{2e^4Q^2x^2}{3m^2c^3R^6}.$$

Полная энергия, теряемая частицей за время пролета через шар, равна:

$$\mathcal{E} = \int\limits_0^{t_0} I\,dt = \int\limits_{-R}^{R} I\,\frac{dx}{\dot{x}}\,. \tag{11}$$

Для вычисления интеграла (11) удобно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + e\varphi(x) = \mathcal{E}_0 + e\varphi(R), \quad \text{или} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathcal{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3}(x^2 - R^2).$$

Выражая отсюда $\dot{x}$ и подставляя скорость движения $\dot{x}$ в (11), получаем:

$$\mathcal{E} = \frac{2Q^2e^4}{3c^3m^2R^6}\sqrt{\frac{mR^3}{|Qe|}}\int\limits_{-R}^{R}\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(U+1)\,R^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2}\sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2R}}\left[(U+1)\arcsin{(U+1)^{-1/2}} - \sqrt{U}\,\right].$$

Здесь $U = \dfrac{2\mathcal{E}_0R}{|Qe|}$.

Пример 1.3 *В классической модели атома Резерфорда электрон с массой m и зарядом e вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом $Z|e|$. Найти закон убывания полной энергии $\mathcal{E}$ электрона, обусловленный дипольным излучением. Вычислить время t, по истечении которого электрон упадёт на ядро вследствие потери энергии на дипольное излучение. В начальный момент времени $t_0 = 0$ электрон находится на расстоянии R от ядра (Задача №300 в [2]).*

Отклонение от кругового движения, вызванное потерей энергии электрона на излучение, за один оборот вокруг ядра весьма мало. Поэтому в каждый момент времени кинетическая и потенциальная энергии электрона выражаются через его полную энергию $\mathcal{E}$. Это обстоятельство дает возможность выразить интенсивность дипольного излучения через полную энергию электрона.

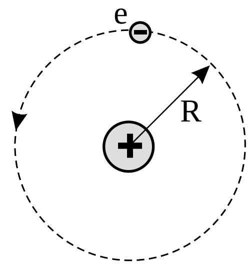

Рис. 4.

Для этого воспользуемся известной из механики теоремой вириала. Суть этой теоремы состоит в том, что если частица движется в потенциальном поле с энергией $U(x) = Ax^k$, где x - координата, то кинетическая энергия T связана с потенциальной U выражением: $T = \frac{k}{2}U$. Так как в данном случае потенциальная энергия электрона в поле ядра $U = -Ze^2/r$ (т.е. $k = -1$) полная энергия $\mathcal{E} = T + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U = -\frac{Ze^2}{2r}$. Соответственно уравнение движения электрона в поля ядра имеет вид $m\ddot{\mathbf{r}} = -Ze^2\mathbf{r}/r^3$. В результате интенсивность дипольного излучения равна:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{Ze^2}{mr^2}\right)^2 = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

Так как интенсивность излучения — это энергия электромагнитного поля, излучаемая в единицу времени, а из закона сохранения энергии $\mathcal{E} + \mathcal{E} = const$, то $I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$. В результате получаем уравнение для изменения энергии частицы со временем $-\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = \frac{32}{3c^3(mZe)^2}dt$. Отсюда можно найти закон убывания полной энергии электрона с течением времени:

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32t}{c^3(mZe)^2},$$

где $\mathcal{E}_0$ — энергия частицы в начальный момент времени $\mathcal{E}_0 = -\frac{Ze^2}{2R}$. При падении частицы на центр $\mathcal{E} \to -\infty$, так как $\mathcal{E} = -\frac{Ze^2}{2r}$. В результате время падения электрона на ядро равно $t_{\text{п}} = \frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4}$.

Известно, что в атоме водорода электрон с наибольшей вероятностью находится на расстоянии $R = a_0 = \hbar^2/me^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$ см. Отсюда время падения электрона на ядро составляет $t \sim 10^{-15}$ сек. Как видно, полученный результат противоречит наблюдаемому времени "жизни" атома водорода, который находится в основном состоянии бесконечно долго.

Этот пример демонстрирует неприменимость результатов классической теории (и механики и электродинамики) для описания объектов микромира (атомы, молекулы).

Пример 1.4 *Простейшая линейная антенна представляет собой тонкий прямолинейный провод длины l, по которому течёт ток $J = J_0 \cos \omega t$. Определить интенсивность I длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №292 в [2]).*

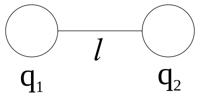

Рис. 5.

Пусть проводник соединяет две сферы (рис. 5). Заряды на сферах периодически меняются со временем. Заряд каждой сферы $q = q_0 \sin \omega t$. В этом случае ток $J = \dot{q} = q_0 \omega \cos \omega t$. В целом система представляет из себя простейший диполь: $d = ql = q_0 l \sin \omega t$, $\dot{d} = \dot{q} l = Jl$; $\ddot{d} = \dot{J} l$. В результате интенсивность дипольного излучения такой системы равна:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{d}}^2(\tau) = \frac{2J_0^2 \omega^2}{3c^3} l^2 \sin^2 \omega (t - r/c), \quad J_0 = q_0 \omega.$$

Интенсивность, усредненная за период колебания тока $T = 2\pi/\omega$, равна:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int\limits_0^T I(t)\, dt = \frac{J_0^2 \omega^2 l^2}{3c^3}, \quad \text{так как} \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.5 *Протон с массой m и зарядом e движется в скрещенных электрическом и магнитном полях с напряженностью $\mathbf{E}$ и индукцией $\mathbf{B}$, которые удовлетворяют условиям $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Внешние поля однородны и постоянны, а протон в начальный момент времени $t_0 = 0$ имел скорость $\mathbf{v}_0$. Определить энергию дипольного излучения, теряемую частицей за время t (Задача №291 в [2]).*

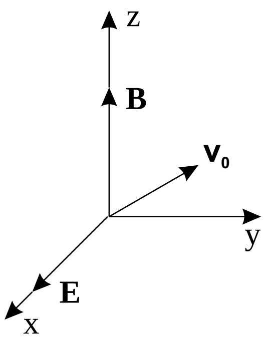

Рис. 6.

Выберем систему координат, как указано на рис. 6. Уравнение движения в этом случае есть:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = eE\mathbf{i} + \frac{e}{c} v_y B \mathbf{i} - \frac{e}{c} v_x B \mathbf{j},$$

$$\text{так как} \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Таким образом, квадрат ускорения $\ddot{\mathbf{r}}^2$ равен:

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{m^2} \left(eE + \frac{e}{c} v_y B \right)^2 + \frac{e^2}{c^2} v_x^2 B^2 = \frac{e^2}{m^2 c^2} B^2 \left[\left(v_y + \frac{E}{B} c \right)^2 + v_x^2 \right].$$

В скрещенных полях квадрат ускорения является интегралом движения, что можно проверить прямым дифференцированием. Используя уравнения движения: $m\ddot{x} = eE + \frac{e}{c}\dot{y}B$, $m\ddot{y} = -\frac{e}{c}B\dot{x}$, получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{m^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{eB}{cm}\left[\left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B\right)\left(-\frac{e}{c}B\dot{x}\right) + \left(\frac{e}{c}B\dot{x}\right)\left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B\right)\right] = 0$$

Поэтому интенсивность излучения – постоянная величина. Следовательно, энергия дипольного излучения, теряемая частицей за время t, есть:

$$\mathcal{E} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}t = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2 t = \frac{2e^4B^2}{3m^2c^5}\left[\left(v_{0y} + \frac{Ec}{B}\right)^2 + v_{0x}^2\right]t\,.$$

Пример 1.6 *Индукция* $\mathbf{B}$ *магнитного поля в полупространстве однородна, постоянна и направлена параллельно граничной плоскости. В это полупространство влетает протон с массой* m *и зарядом* e. *Скорость* $\mathbf{v}$ *протона при влёте перпендикулярна граничной плоскости. Определить энергию* $\mathcal{E}$, *теряемую протоном на дипольное излучение за время движения в магнитном поле (Задача №290 в [2]).*

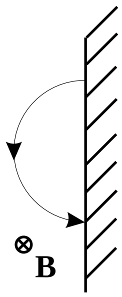

Рис. 7.

Уравнение движения протона имеет вид: $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$. Отсюда $\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$, $\ddot{\mathbf{r}}^2 = \left(\frac{e}{mc}\right)^2 v^2B^2$. Энергия частицы в магнитном поле не меняется с течением времени $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}) = 0$. Поэтому $v^2 = const$ и $\ddot{r}^2 = const$. Так как $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}$ для интенсивности дипольного излучения имеем:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2e^4v^2B^2}{3m^2c^5}.$$

Выясним, как будет двигаться протон в магнитном поле. Из уравнения движения получаем $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\times\mathbf{B}]$. Направив ось z вдоль вектора $\mathbf{B}$, находим:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad \text{где} \quad \omega = \frac{eB}{mc}. \qquad (12)$$

Умножим второе из уравнений в (12) на мнимую единицу i и сложим с первым уравнением из (12). В результате:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y). \qquad (13)$$

Интегрируя (13), получим $v_x + iv_y = v\exp[-i(\omega t + \alpha)]$. Отделив действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v\sin(\omega t + \alpha), \qquad (14)$$

где α – угол, который составляет вектор $\mathbf{v}$ с осью x в момент времени $t = 0$. Интегрируя (14), имеем:

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \quad r = v/\omega.$$

Интегрируя дважды третье уравнение в (12), находим $z = z_0$. Выбирая систему координат так, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, ясно, что протон движется по окружности радиуса r с периодом обращения $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, энергия излучения протона за время движения в поле есть: $\mathcal{E} = I\dfrac{T}{2} = \dfrac{2\pi e^3 v^2 B}{3mc^4}$.

2 Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение

В соответствии с общей теорией излучения интенсивность магнитно-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_\mu = \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \tag{15}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент системы. Соответственно интенсивность квадрупольного излучения определяется выражением:

$$I_Q = \frac{1}{180c^5}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \dddot{Q}^2_{\alpha\beta}(\tau). \tag{16}$$

Пример 2.1 *Простейшая рамочная антенна представляет собой прямоугольную рамку со сторонами a и b, по которой течёт линейный ток $J = J_0\cos\omega t$. Определить интенсивность I длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №313 в [2]).*

По определению магнитный момент линейного тока J равен $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{J}{2c}\displaystyle\int[\mathbf{r}\times d\mathbf{l}]$. Так как $[\mathbf{r}\times d\mathbf{l}] = 2\mathbf{n}\,dS$, где dS — площадь элементарного треугольника, образованного двумя радиус-векторами, проведенными к обоим концам элемента длины $d\mathbf{l}$, а $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности треугольника, магнитный момент замкнутого контура с током определяется выражением: $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{JS}{c}\mathbf{n}$. В данной задаче $S = ab$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{abJ_0}{c}\cos(\omega t)\mathbf{n}, \quad \ddot{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{abJ_0\omega^2}{c}\cos(\omega t)\mathbf{n}\,.$$

Отсюда интенсивность магнитно-дипольного излучения такой антенны равна: $I = \dfrac{2J_0^2\omega^4a^2b^2}{3c^5}\cos^2(\omega t)$, а интенсивность, усредненная за период колебания тока, есть:

$$\langle I\rangle = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I(t)\,dt = \frac{J_0^2\omega^4 a^2 b^2}{3c^5}.$$

Пример 2.2 *В тонкой неподвижной квадратной рамке со стороной l возбуждён ток $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$. Определить полную энергию $\mathcal{E}$ длинноволнового излучения за время $-\infty < t < \infty$. (Задача №320 в [2])*

Ток в квадратной рамке создает магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{Jl^2}{c}\mathbf{n} = \dfrac{J_0 l^2}{c}e^{-\alpha t^2}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к рамке. Так как $\boldsymbol{\mu}$ зависит от времени, возникает магнитно-дипольное излучение, интенсивность которого определяется выражением (15). Вычисляя вторую производную от магнитного момента, получим:

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{J_0 l^2}{c}e^{-\alpha t^2}(-2\alpha t)\mathbf{n}, \quad \ddot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{J_0 l^2}{c}e^{-\alpha t^2}(4\alpha^2 t^2 - 2\alpha)\mathbf{n},$$
$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 = \frac{l^4}{c^2}J_0^2 e^{-2\alpha t^2}4\alpha^2(4\alpha^2 t^4 - 4\alpha t^2 + 1)\,.$$

Таким образом, полная энергия, излученная рамкой за время $-\infty < t < \infty$, определяется выражением:

$$\mathcal{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I_\mu\,dt = \frac{J_0^2 l^4\alpha}{c^5}\sqrt{2\pi\alpha}. \quad \text{Здесь учтено, что} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Пример 2.3 *Однородно заряженный тонкий диск радиуса R вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Полный заряд диска равен q. Найти интенсивность I излучения такой системы. (Задача №343 в [2])*

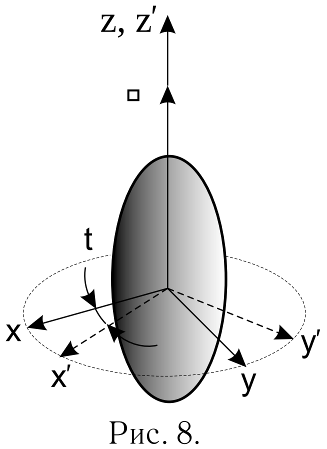

Рис. 8.

Магнитный момент диска $\boldsymbol{\mu} = qR^2\boldsymbol{\omega}/8c$ и $\ddot{\boldsymbol{\mu}} = 0$, следовательно, магнитно-дипольное излучение отсутствует. Излучение обусловлено изменяющимся квадрупольным моментом. Вычислим компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$. Свяжем с диском систему координат K': оси x' и z' лежат в плоскости диска, а ось y' перпендикулярна плоскости диска (см. рис. 8). Компоненты тензора квадрупольного момента в системе координат K' равны:

$$Q'_{\alpha\beta} = \int \sigma(3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta}r'^2)ds', \quad \alpha,\beta \in 1,2,3\,.$$

Вычисление этих компонент приводит к следующим результатам:

$$Q'_{yy} = \int\limits_0^R \int\limits_0^{2\pi} \sigma(3y'^2 - r'^2) r' dr' d\alpha' = -\frac{qR^2}{2}, \quad Q'_{xx} = Q'_{zz} = \frac{qR^2}{4},$$

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0\,.$$

Или в матричном виде:

$$Q'_{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}\,.$$

Компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в системе K найдем, используя стандартное преобразование поворота системы координат на угол $\varphi = \omega t$ вокруг осей z, z' : $Q_{\mu\nu} = \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{3} a_{\mu\alpha} Q'_{\alpha\beta} a^T_{\beta\nu}$, где матрица преобразований имеет вид

$$a_{\mu\alpha} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате: $Q = aQ'a^T$,

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t & 0 \\ \sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

После умножения матриц для матрицы тензора квадрупольного момента в системе координат K находим:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos^2\omega t - 2\sin^2\omega t & 3\sin\omega t\cos\omega t & 0 \\ 3\sin\omega t\cos\omega t & \sin^2\omega t - 2\cos^2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}. \tag{17}$$

Вычисляя третью производную по времени от Q, после стандартных тригонометрических преобразований получим:

$$\dddot{Q} = \frac{3}{2}(2\omega)^3 \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

И соответственно

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \dddot{Q}^2_{\alpha\beta} = 18\omega^6 q^2 R^4.$$

Таким образом, интенсивность излучения однородно заряженного диска, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, равна:

$$I = \frac{1}{180c^5} 18\omega^6 q^2 R^4 = \frac{q^2 R^4 \omega^6}{10c^5}.$$

Пример 2.4 *Однородный шар радиуса R вращается около своего диаметра с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Ось вращения наклонена под углом θ к направлению внешнего постоянного однородного магнитного поля $\mathbf{B}$. Заряд и масса шара Q и m. Определить интенсивность излучения I (Задача №318 в [2]).*

Магнитный момент шара равен:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{QR^2}{5c}\boldsymbol{\omega}. \tag{18}$$

Воспользуемся известным уравнением движения для механического момента $\mathbf{L}$ системы: $\dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = \sum[\mathbf{r}\times\mathbf{f}]$ – сумма моментов всех сил, действующих на систему. Учитывая связь между магнитным и механическим моментами: $\boldsymbol{\mu} = \dfrac{Q}{2mc}\mathbf{L}$, а также выражение для момента сил, действующих на систему токов с магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$: $\mathbf{K} = [\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}]$, получим следующее уравнение движения магнитного момента, находящегося во внешнем поле:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}], \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{Q}{2mc}[\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}], \quad \frac{d^2\boldsymbol{\mu}}{dt^2} = \frac{Q^2}{(2mc)^2}[[\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}]\times\mathbf{B}],$$

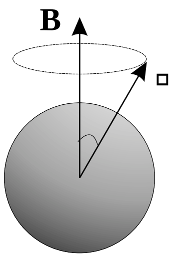

Рис. 9.

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4}(\mu^2\mathbf{B}^4 - \mathbf{B}^2(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B})^2). \tag{19}$$

Выберем систему координат так, что направление оси z совпадает с направлением магнитного поля (см. рис. 9). Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{Q}{2mc}[\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{B}] = \frac{Q}{2mc}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Отсюда:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \Omega\mu_y, \quad \frac{d\mu_y}{dt} = -\Omega\mu_x, \quad \frac{d\mu_z}{dt} = 0, \quad \text{где} \quad \Omega = \frac{QB}{2mc}. \tag{20}$$

Умножая второе уравнение в (20) на i и складывая с первым, получим: $\dfrac{d}{dt}(\mu_x + i\mu_y) = -i\Omega(\mu_x + i\mu_y)$. Интегрируя последнее равенство, имеем

$\mu_x+i\mu_y = \mu_t e^{-i(\Omega t+\alpha)}$. Отделяя действительную и мнимую части в полученном соотношении, находим:

$$\mu_x = \mu_t\cos(\Omega t+\alpha), \quad \mu_y = -\mu_t\sin(\Omega t+\alpha), \tag{21}$$

где μ_t — проекция вектора $\boldsymbol{\mu}$ на плоскость xy. Интегрируя уравнение $\dot{\mu}_z = 0$ в (20), получаем $\mu_z = const$, и, следовательно, $(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) = const$. Таким образом, с учетом (21), получаем, что магнитный момент вращается вокруг направления поля, сохраняя свою абсолютную величину и угол с направлением поля (ларморова прецессия). Частота вращения $\Omega = \dfrac{QB}{2mc}$ носит название ларморовой частоты. Учитывая, что $(\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B}) = \mu B\cos\theta$, получим из (19)

$$\ddot{\mu}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4}\mu^2B^4(1-\cos^2\theta) = \frac{Q^4}{(2mc)^4}\mu^2B^4\sin^2\theta\,.$$

С учетом равенства (18) и значения ларморовой частоты Ω находим окончательно для интенсивности излучения вращающегося шара следующее выражение: $I = \dfrac{Q^2\omega^2}{600c}\left(\dfrac{QRB}{mc^2}\right)^4\sin^2\theta$.

3 Спектральное разложение излучения

Спектральная плотность излучения $\mathcal{E}(\omega)$ определяется как энергия, приходящаяся на единичный интервал частот. Полная энергия, излученная за все время действия источника $\mathcal{E}$, связана со спектральной плотностью излучения $\mathcal{E}(\omega)$ следующим соотношением:

$$\mathcal{E} = \int\limits_0^\infty d\mathcal{E}_\omega = \int\limits_0^\infty \mathcal{E}(\omega)d\omega.$$

В соответствии с общей теорией излучения мультипольное разложение энергии, излученной в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$, представляется в виде бесконечного ряда. Первые три члена этого ряда (с учетом E2-излучения) равны:

$$d\mathcal{E}_\omega = \left(\frac{4|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{4|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{|\dddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{90c^5} + \ldots\right)d\omega, \tag{22}$$

где $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)$ и $\dddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)$ — Фурье компоненты вторых производных по времени дипольного $\mathbf{d}(t)$, магнитного $\boldsymbol{\mu}(t)$ и квадрупольного $Q_{\alpha\beta}(t)$ моментов соответственно. При этом последовательно слагаемые ряда (22) определяют спектральную плотность электрически-дипольного (E1), магнитно-дипольного ($M1$) и электрически-квадрупольного излучения (E2). Фурье компонента $f(\omega)$ функции $f(t)$ определяется соотношением: $f(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt.$

Пример 3.1 *До начального момента времени $t_0 = 0$ электрон с массой m и зарядом e покоился. При $t \geqslant 0$ он движется под действием электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t$. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную электроном на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №351 в [2]).*

Закон движения электрона под действием поля запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{E}e$, где e — заряд электрона. Дипольный момент электрона равен: $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Дифференцируя дважды по времени $\mathbf{d}(t)$, с учетом уравнения движения находим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \dfrac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos\omega_0 t, & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Для вычисления спектральной плотности распределения излучения вычислим Фурье-образ $\ddot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \int\limits_0^{+\infty} [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)t}] e^{-\alpha t} dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \left[\frac{1}{\alpha - i(\omega+\omega_0)} + \frac{1}{\alpha - i(\omega-\omega_0)} \right].$$

Отсюда получаем:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{e^4 E_0^2}{2\pi m^2} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega+\omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega-\omega_0)^2]}.$$

На основании (22) находим искомую энергию электрически-дипольного излучения в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega+\omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega-\omega_0)^2]} d\omega. \tag{23}$$

Пример 3.2 *Неподвижный шар равномерно заряжен с объемной плотностью ρ положительным зарядом. Внутри шара на расстоянии a от его центра в моменты времени $t \leqslant 0$ покоился электрон с массой*

m и зарядом e. В последующее время $t > 0$ электрон движется под действием электрического поля шара. Учитывая силу радиационного трения, определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$ дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №353 в [2]).

Сила радиационного трения — это сила, действующая на излучающую заряженную частицу со стороны излучаемого частицей электромагнитного поля. В случае, если скорость движения частицы $v \ll c$, сила радиационного трения имеет вид:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}, \tag{24}$$

где e и $\mathbf{r}$ — заряд и радиус-вектор частицы.

Напряженность электрического поля, создаваемая заряженным шаром внутри него, равна: $\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}$. Следовательно, уравнение движения электрона внутри шара с учетом силы (24) запишется в виде:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4}{3}\pi\rho|e|\mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{\mathbf{r}}, \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3 m}\dddot{\mathbf{r}} = 0, \tag{25}$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = \frac{4}{3m}\pi\rho|e|$. Сила радиационного трения много меньше кулоновской силы, поэтому уравнение (25) можно решать методом последовательных приближений. Отбрасывая член с третьей производной в уравнении (25), получаем: $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$ откуда $\dddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\dot{\mathbf{r}}$. Подставляя это выражение в (25) и вводя обозначение: $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3 m}$, получаем следующее уравнение:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0. \tag{26}$$

Так как электрон движется по прямой, выберем ось x в направлении движения электрона. Общее решение дифференциального уравнения (26) в этом случае с учетом $\gamma \ll \omega_0$ есть:

$$x(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t).$$

Подставляя начальные условия $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$, находим $A = a$, $B = \frac{\gamma a}{2\omega_0}$. В результате:

$$x(t) = \exp(-\frac{\gamma}{2}t)(a\cos\omega_0 t + \frac{\gamma a}{2\omega_0}\sin\omega_0 t). \tag{27}$$

Второе слагаемое в (27) можно отбросить, так как $\gamma \ll \omega_0$. С учетом этого для $\ddot{\mathbf{d}}$ получим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \omega_0^2|e|\mathbf{a}\exp(-\frac{\gamma}{2}t)\cos\omega_0 t.$$

Сравнивая полученное выражение для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ с выражением для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ в примере 3.1, находим для Фурье компонент дипольного момента:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 e^2 a^2}{2\pi} \frac{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2}{\left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega + \omega_0)^2\right]\left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2\right]} . \tag{28}$$

Как следует из (28), основной вклад в $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$ вносят значения $\omega \approx \omega_0$. Полагая $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, получим:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 \simeq \frac{\omega_0^4 e^2 a^2}{8\pi\left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2\right]}. \tag{29}$$

Таким образом, с учетом сделанных приближений на основании (22) энергия излучения в интервале частот $d\omega$ есть:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Пример 3.3 *Магнитный момент токов, текущих в весьма малой области пространства, меняется со временем по закону $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 e^{-t^2/T^2}$, где $\boldsymbol{\mu}_0$ — постоянный вектор, а T — постоянная. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за бесконечное время от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №366 в [2]).*

Энергия $d\mathcal{E}_\omega$, излученная в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, в данном случае определяется слагаемым, соответствующим магнитно-дипольному излучению

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} d\omega. \tag{30}$$

По свойству Фурье преобразования имеем $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\omega^2 \boldsymbol{\mu}(\omega)$. Фурье образ $\boldsymbol{\mu}(\omega)$ равен:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \boldsymbol{\mu}_0 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t - t^2/T^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\mu}_0 T \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

При вычислении в показателе экспоненты необходимо выделить полный квадрат и использовать интеграл Пуассона. Таким образом,

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2 \boldsymbol{\mu}_0 T \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

На основании (30) получаем окончательный ответ:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\mu_0^2 T^2 \omega^4}{3c^3} \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{2}\right) d\omega.$$

Пример 3.4 *На отрезке длины l течет линейный ток $J = J_0 e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t$, где постоянные величины удовлетворяют неравенствам $\alpha l \ll c$ и $\omega_0 l \ll c$. В моменты времени $t \leqslant 0$ ток равнялся нулю. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №352 в [2]).*

В данной системе возникает электрически-дипольное излучение, так как $\mathbf{d}(t) = q(t)\mathbf{l}$, где вектор $\mathbf{l}$ направлен вдоль отрезка длинной l и по модулю равен длине отрезка. Дифференцируя $\mathbf{d}(t)$ и подставляя выражение для J, находим:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{l}J_0 e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t.$$

Найдем Фурье образ для функции $\dot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{d}}(\omega) &= \frac{\mathbf{l}J_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty e^{i\omega t-\alpha t}\sin\omega_0 t\,dt = \\ &= \frac{\mathbf{l}J_0}{2i\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\alpha - i(\omega+\omega_0)} - \frac{1}{\alpha - i(\omega-\omega_0)}\right].\end{aligned} \tag{31}$$

С использованием свойств Фурье преобразования, получаем: $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -i\omega\dot{\mathbf{d}}(\omega)$. Отсюда, после подстановки выражения для $\dot{\mathbf{d}}(\omega)$ из формулы (31) получим следующее выражение для $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{J_0^2 l^2\omega^2\omega_0^2}{2\pi[\alpha^2 + (\omega+\omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega-\omega_0)^2]}. \tag{32}$$

Подставляя это выражение в формулу (22), находим окончательно:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2J_0^2 l^2\omega_0^2}{3\pi c^3}\frac{\omega^2}{[\alpha + (\omega+\omega_0)^2][\alpha + (\omega-\omega_0)^2]}d\omega.$$

Пример 3.5 *Электрон с массой m и зарядом e влетает в полупространство, в котором напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля однородна и постоянна. Направление скорости $\mathbf{v}_0$ электрона при влете образует с вектором $\mathbf{E}$ острый угол α. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за все время движения во внешнем поле (Задача №360 в [2]).*

Пусть вектор $\mathbf{E}$ направлен перпендикулярно к плоскости, разделяющей два полупространства. Ось y направим вдоль вектора $\mathbf{E}$, начало координат поместим в точку влета электрона в поле. Основной вклад в излучение дает дипольное излучение. Вторая производная от дипольного момента, очевидно, равна: $\ddot{\mathbf{d}} = -|e|\ddot{\mathbf{r}}$. Закон движения электрона в электрическом поле запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = -|e|\mathbf{E}$. Откуда получаем $\ddot{\mathbf{d}} = \dfrac{e^2\mathbf{E}}{m}$. Фурье образ дипольного момента выражается через интеграл:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2\mathbf{E}}{m} \int\limits_0^\tau e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2\mathbf{E}}{\omega m} e^{i\omega\tau/2} \sin\frac{\omega\tau}{2}, \tag{33}$$

где τ — время движения электрона в поле. Это время можно найти, решив уравнение движения. С учетом начальных условий решение уравнения движения есть:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t - \frac{|e|\mathbf{E}}{2m} t^2.$$

Проецируя это уравнение на ось y и выбирая $y = 0$, получаем соотношение, из которого можно найти время нахождения частицы в поле

$$v_0 \cos\alpha\, t - \frac{|e|E}{2m} t^2 = 0. \tag{34}$$

Очевидно, что электрон влетевший в поле, пролетев по параболе, вылетает из него. Таким образом, уравнение (34) имеет два решения для t: $t = 0$ и $t = \dfrac{2v_0 m\cos\alpha}{|e|E}$. Первое решение соответствует моменту влета электрона в электрическое поле, а второе — равно τ — искомому времени движения частицы в поле. Подставляя τ в (33) и $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ в (22), получаем энергию, излученную электроном в поле в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^4E^2}{3\pi m^2c^3\omega^2} \sin^2\frac{\omega m v_0\cos\alpha}{|e|E} d\omega\,.$$

Пример 3.6 *По неподвижной тонкой рамке в неограниченном промежутке времени $-\infty < t < \infty$ течет линейный ток $J = J_0\dfrac{\tau t}{\tau^2+t^2}$, где J_0 и τ — некоторые постоянные. Площадь рамки S, а ее линейные размеры малы по сравнению с величиной $c\tau$, где c — скорость света в вакууме. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах в интервале от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №367 в [2]).*

Излучение данной системы — магнитно-дипольное. Магнитный момент линейного тока вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \frac{J\mathbf{S}}{c} = \frac{J_0\mathbf{S}\tau t}{c(\tau^2+t^2)}, \tag{35}$$

где вектор $\mathbf{S}$ по модулю равен площади рамки S и направлен перпендикулярно плоскости рамки. Фурье образ функции $\boldsymbol{\mu}(t)$ ищем в виде:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{J_0\mathbf{S}}{\sqrt{2\pi}c} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau t}{\tau^2+t^2} e^{i\omega t} dt.$$

Этот интеграл вычисляется с использованием теории вычетов, в результате чего получаем:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{iJ_0\mathbf{S}\tau\pi}{\sqrt{2\pi}c}e^{-\omega\tau}.$$

На основании свойств фурье преобразования находим:

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\omega^2\boldsymbol{\mu} = -\frac{iJ_0\mathbf{S}\omega^2\tau\pi}{\sqrt{2\pi}c}e^{-\omega\tau}.$$

Таким образом, искомая энергия излучения имеет вид:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\pi J_0^2 S^2\tau^2}{3c^5}\omega^4 e^{-2\omega\tau}d\omega.$$

4 Угловое распределение излучения

Угловое распределение излучения определяет энергию, излучаемую системой в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega = \sin^2\theta d\theta d\varphi$, где θ и φ — углы сферической системы координат. В свободном пространстве структура поля в волновой зоне определяется тройкой ортогональных векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения поля, а $E = B$, $\mathbf{E} = [\mathbf{B}\times\mathbf{n}]$. Вектор Умова-Пойнтинга в этом случае равен (т.к. $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}) = 0$):

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right] = \frac{cB^2}{4\pi}\,\mathbf{n}.$$

Энергия, проходящая в единицу времени через бесконечно малый элемент поверхности $dS = r^2 d\Omega$, равна

$$dI = \mathbf{s}\cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{s}|r^2 d\Omega = \frac{cB^2r^2}{4\pi}d\Omega. \tag{36}$$

Из общей теории излучения следует, что мультипольное разложение вектора индукции на больших расстояниях можно представить в виде бесконечного ряда (см. [1]):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau)\times\mathbf{n}]}{c^2r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau)\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]}{c^2r} + \frac{[\dddot{\mathbf{Q}}(\tau)\times\mathbf{n}]}{6c^3r} + \ldots,\ \tau = t - r/c, \tag{37}$$

где вектор $\mathbf{Q}$ имееет компоненты $Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3} Q_{\alpha\beta}n_\beta$, $Q_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольного момента.

Формула (37) заметно упрощается, когда излучающая система характеризуется только одним дипольным моментом, магнитным моментом или тензором квадрупольного момента, и угловое распределение интенсивности излучения принимает в этих случаях вид

$$dI_d = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}\, d\Omega \quad \text{— E1-излучение,} \tag{38}$$

$$dI_\mu = \frac{[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}\, d\Omega \quad \text{— M1-излучение,} \tag{39}$$

$$dI_Q = \frac{[\dddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5}\, d\Omega \quad \text{— E2-излучение.} \tag{40}$$

Угловое распределение энергии, излученной за все время действия источника, получается путем интегрирования интенсивности излучения (36) по времени

$$d\mathcal{E} = \frac{c\, r^2}{4\pi}\, d\Omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} B^2(\mathbf{r}, t) dt. \tag{41}$$

Разлагая в (41) индукцию магнитного поля $B(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по переменной t, можно определить энергию $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\,\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале ω до $\omega + d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\,\omega} = \frac{cr^2}{2\pi} \left|\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)\right|^2 \, d\Omega\, d\omega. \tag{42}$$

Пример 4.1 *Частица с массой m и зарядом e движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с индукцией $\mathbf{B}_0$. Скорость частицы по абсолютной величине равна v. Найти интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период движения частицы (Задача №375 в [2]).*

Интенсивность дипольного излучения в элемент $d\Omega$ телесного угла выражается через индукцию $\mathbf{B}$ магнитного поля излучаемой волны, которая, согласно (37), равна:

$$\mathbf{B} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \ldots, \tag{43}$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки наблюдения. Так как дипольный момент заряда $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_e$ ($\mathbf{r}_e$ — радиус-вектор положения заряда в пространстве), $\ddot{\mathbf{d}} = e\,\ddot{\mathbf{r}}_e$. Ускорение частицы определяется из уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{mc}\,[\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y, \\ \dot{v}_y = -\omega v_x, \end{cases} \tag{44}$$

где учтено, что частица движется в плоскости xy, ортогональной вектору $\mathbf{B}$, и введено обозначение $\omega \equiv \dfrac{eB}{mc}$. Решая (44), находим, что частица движется по окружности с угловой скоростью ω. Отсюда,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{mc}\,[\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0] = -\frac{e^2 v B_0}{mc}\,\mathbf{n}'(t),$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{i}\cos(\omega t) + \mathbf{j}\sin(\omega t). \tag{45}$$

Здесь $\mathbf{n}'$ - единичный вектор, направленный по радиус-вектору $\mathbf{r}_e$ частицы. По определению, единичный радиус-вектор точки наблюдения есть:

$$\mathbf{n} = \sin\theta\cos\varphi\,\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\mathbf{j} + \cos\theta\,\mathbf{k}.$$

Таким образом, интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в момент времени t равна:

$$dI = \frac{v^2\omega^2}{4\pi c^3}\,[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]^2\,d\Omega. \tag{46}$$

Учитывая равенство $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]^2 = a^2b^2 - (\mathbf{ab})^2$, находим:

$$\begin{aligned}[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]^2 &= 1 - (\mathbf{nn}')^2 = \\ &= 1 - (\cos\varphi\cos\omega t + \sin\varphi\sin\omega t)^2\sin^2\theta = \\ &= 1 - \cos^2(\omega t - \varphi)\sin^2\theta.\end{aligned}$$

Очевидно, что среднее за период полученного выражения равно:

$$\langle[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]^2\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T [\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]^2\,dt = 1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right). \tag{47}$$

Таким образом, с учетом (47) получаем окончательно:

$$\langle dI\rangle = \frac{e^4 v^2 B_0^2}{8\pi m^2 c^5}\,(1+\cos^2\theta)\,d\Omega.$$

Пример 4.2 *Протон с массой m и зарядом e покидает неподвижное ядро, радиус которого R, а остаточный заряд Ze. При вылете из ядра скорость протона равнялась нулю. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии дипольного излучения, обусловленного кулоновским взаимодействием протона с ядром.*

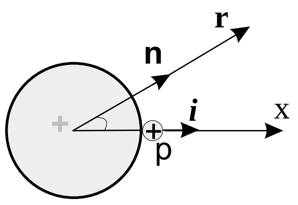

Рис. 10.

С учетом (37) и (41) получим:

$$d\mathcal{E} = \int_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3}\,[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}]^2 d\Omega\, dt.$$

На основании уравнения движения для второй производной по времени от дипольного момента находим $\ddot{\mathbf{d}} = e\dfrac{\mathbf{F}}{m} = \dfrac{Ze^3}{mr^2}\mathbf{i}$. Здесь $\mathbf{i}$ — единичный вектор в направлении движения протона (ось x). Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении точки наблюдения, то

$$[\ddot{\mathbf{d}}\times\mathbf{n}]^2 = \frac{Z^2e^6}{m^2x^4}\,\sin^2\theta.$$

Отсюда:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi c^3}\,\frac{Z^2e^6}{m^2}\,\sin^2\theta\int_0^\infty \frac{dt}{x^4}, \tag{48}$$

где $x = x(t)$. Зависимость энергии излучения от угла между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{d}$ определяется множителем $\sin^2\theta$. Для определения величины энергии излучения надо вычислить лишь общий множитель:

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty \frac{dt}{x^4} = \int_R^\infty \frac{dx}{x^4\dot{x}}\,. \tag{49}$$

На основании закона сохранения энергии имеем: $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + \dfrac{Ze^2}{x} = \dfrac{Ze^2}{R}$, отсюда можно выразить скорость частицы $\dot{x}$ через координату x:

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2Ze^2}{mR}\left(1-\frac{R}{x}\right)}.$$

Подставляя $\dot{x}$ в (49) и выполняя замену переменной $u = 1-R/x$, $du = R dx/x^2$, $u(x{=}R) = 0$, $u(x{=}\infty) = 1$, можно вычислить общий множитель $\mathcal{J}$ в (48):

$$\mathcal{J} = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}}\int_0^1 \frac{1}{R^3}\,\frac{du}{\sqrt{u}}(1-u)^2 = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}}\,\frac{1}{R^3}\frac{16}{15}, \quad \text{т. к.} \int_0^1 \frac{(1-y)^2dy}{\sqrt{y}} = \frac{16}{15}.$$

Окончательно получим следующее выражение для углового распределения излучения:

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{15\pi R}\sqrt{\left(\frac{2Ze^2}{mRc^2}\right)^3}\,\sin^2\theta\, d\Omega.$$

Пример 4.3 *Однородно заряженный цилиндр радиуса R и высоты h вращается с постоянной угловой скоростью ω около оси, проходящей через среднюю точку цилиндра перпендикулярно оси его симметрии. Полный заряд равен q. Определить интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения (Задача №379 в [2]).*

Начало покоящейся системы координат поместим в средней точке цилиндра, а ось z выберем вдоль вектора угловой скорости (см. рис. 11). Дипольный момент цилиндра равен нулю. Магнитный момент вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра от времени не зависит. Поэтому излучение будет определяться изменяющимся во времени квадрупольным моментом.

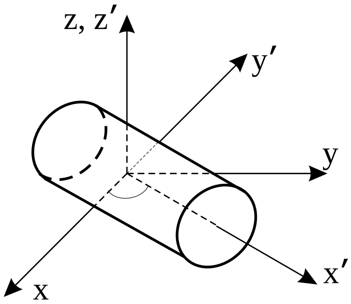

Рис. 11.

Жестко связанная с цилиндром штрихованная система координат $x'y'z'$ вращается около оси z' ($z' \equiv z$), причем ось x' совпадает с осью цилиндра. Тензор квадрупольного момента Q' в штрихованной системе координат $x'y'z'$ имеет вид:

$$Q'_{\alpha\beta} = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{q}{4}\left(\frac{h^2}{3} - R^2\right).$$

Найдем теперь компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в неподвижной системе координат:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\,\delta=1}^{3} a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta} = \sum_{\gamma,\,\delta=1}^{3} a_{\alpha\gamma} Q'_{\gamma\delta} a^T_{\delta\beta}, \quad \alpha,\,\beta \in 1,\,2,\,3, \tag{50}$$

где $a_{\alpha\gamma}$ — матрица преобразования компонент радиуса-вектора при повороте системы координат: $x_\alpha = \sum\limits_{\beta=1}^{3} a_{\alpha\beta} x'_\beta$. Учитывая выбор систем координат (см. рис. 11), для матрицы поворота имеем:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $z = z'$, $\varphi = \omega t$. Вычисляя произведение матриц на основании (50)

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \\ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\cos 2\varphi + 1 & 3\sin 2\varphi & 0 \\ 3\sin 2\varphi & -3\cos 2\varphi + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q. \quad (51)$$

Отсюда можно определить выражение для $\dddot{Q}_{\alpha\beta}$:

$$\dddot{Q}_{\alpha\beta} = -12Q\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный радиус-вектор точки наблюдения, выраженный через переменные сферической системы координат, есть:

$$\mathbf{n} = \sin\theta\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\theta\sin\varphi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k}\,.$$

Обозначая через n_α компоненты единичного радиус-вектора точки наблюдения поля, вычислим компоненты третьей производной по времени вектора $\mathbf{Q}$:

$$\dddot{Q}_1 = \sum_{\alpha=1}^{3} \dddot{Q}_{1\alpha} n_\alpha = -(-\sin 2\omega t \sin\theta\cos\varphi + \cos 2\omega t \sin\theta\sin\varphi) 12Q\omega^3 = \\ = 12Q\omega^3 \sin\theta \sin(2\omega t - \varphi),$$

$$\dddot{Q}_2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \dddot{Q}_{2\alpha} n_\alpha = -12Q\omega^3 \sin\theta(\cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t \sin\varphi) = \\ = -12Q\omega^3 \sin\theta\cos(2\omega t - \varphi),$$

$$\dddot{Q}_3 = \sum_{\alpha=1}^{3} \dddot{Q}_{3\alpha} n_\alpha = 0,$$

или

$$\dddot{\mathbf{Q}} = 12Q\omega^3 \sin\theta \Big\{ \sin(2\omega t - \varphi)\mathbf{i} - \cos(2\omega t - \varphi)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \Big\}.$$

В результате из (40) следует выражение для энергии излучаемой такой системой в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$dI_Q = \frac{[\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5}\, d\Omega = \frac{Q^2\omega^6}{\pi c^5}\, \sin^2\theta (1 - \frac{1}{2}\, \sin^2\theta) d\Omega = \frac{Q^2\omega^6}{2\pi c^5}\, (1 - \cos^4\theta)\, d\Omega.$$

Пример 4.4 *Прямоугольная рамка с постоянным линейным током J вращается вокруг своей диагонали с постоянной угловой скоростью ω. Площадь рамки равна S, а ее линейные размеры малы по сравнению с длиной излучаемой волны. Найти интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения рамки (Задача №376 в [2]).*

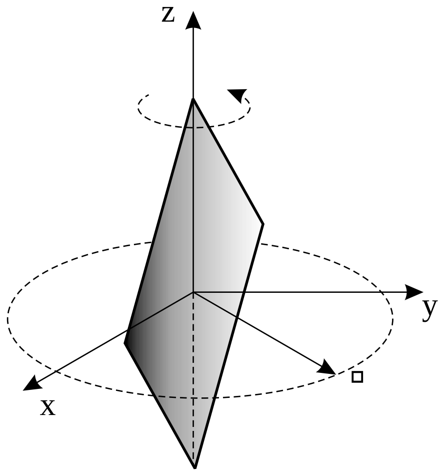

Рис. 12.

По определению магнитный момент рамки равен:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \frac{\mathcal{J} S}{c}\,\mathbf{n}'(t) = \frac{\mathcal{J} S}{c}(\mathbf{i}\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\omega t + \mathbf{k}0).$$

Соответственно, вторая производная магнитного момента равна:

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{\mathcal{J} S}{c}\,\omega^2 \mathbf{n}'(t).$$

Интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ определяется формулой (39):

$$dI = \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau)\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]^2}{4\pi c^3}\,d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3}\frac{\mathcal{J}^2 S^2\omega^4}{c^2}[[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]^2\,d\Omega\,,$$

где $\tau = t - r/c$.

$$[[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]^2 = 1 - \cos^2(\omega\tau - \varphi)\sin^2\theta.$$

Соответственно, среднее за период выражение имеет вид:

$$\langle[[\mathbf{n}'\times\mathbf{n}]\times\mathbf{n}]^2\rangle = 1 - \frac{1}{2}\,\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta).$$

Окончательно получаем:

$$\langle dI\rangle = \frac{\mathcal{J}^2 S^2\omega^4}{8\pi c^5}(1+\cos^2\theta)d\Omega.$$

Пример 4.5 *Квадрупольный момент Q тела вращения меняется со временем по закону $Q = Q_0 e^{-(t/T)^2}$, где Q_0 и T — постоянные. Найти энергию $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале от ω $\omega + d\omega$ за бесконечное время от от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №382 в [2]).*

По определению, у тела вращения $Q_{11} = Q_{22} = -\dfrac{1}{2}Q_{33}$, где $Q_{33} = Q$ — называется квадрупольным моментом. Таким образом, компоненты вектора $\dddot{\mathbf{Q}}$ равны

$$\dddot{\mathbf{Q}} \Rightarrow \left(-\frac{\dddot{Q}}{2}\,n_x, -\frac{\dddot{Q}}{2}\,n_y, \dddot{Q}\,n_z\right) = -\frac{1}{2}\,\dddot{Q}\,\mathbf{n} + \frac{3}{2}\,\dddot{Q}\,\mathbf{k}\,n_z.$$

Фурье компонента функции $Q(t)$ есть:

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\, Q_0 e^{-t^2/T^2}\, dt = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} T e^{-\omega^2 T^2/4}\,.$$

Соответственно $\dddot{\mathbf{Q}}(\omega) = i\omega^3 Q(\omega)\left(-\frac{1}{2}\,\mathbf{n} + \frac{3}{2}\,n_z\,\mathbf{k}\right)$. На основании (42)

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\,\omega}}{d\Omega\, d\omega} = \frac{\left|[\dddot{\mathbf{Q}}(\omega)\times\mathbf{n}]\right|^2}{72\pi c^5}.$$

Окончательно получаем:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\,\omega} = \frac{Q_0^2\, T^2\omega^6}{256\pi c^5}\, e^{-\omega^2 T^2/2}\, \sin^2 2\theta\, d\Omega\, d\omega.$$

Пример 4.6 *При распаде неподвижного ядра радиуса R образовалась α-частица со скоростью, равной нулю. Заряд α-частицы q, а ее радиус пренебрежимо мал по сравнению с R. В результате кулоновского отталкивания α-частица удалилась на бесконечность. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии излучения с учетом малого слагаемого порядка $\frac{v}{c} \ll 1$, где v — скорость α-частицы на бесконечности. (Задача №383 в [2])*

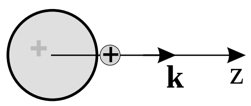

Рис. 13.

Магнитный момент такой системы равен нулю. Вычисляя тензор квадрупольного момента, получим:

$$Q_{xx} = -qz^2,\ Q_{yy} = -qz^2,\ Q_{zz} \equiv Q_0 = 2qz^2.$$

Или в матричном виде:

$$Q_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{Q_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad \dddot{Q}_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{\dddot{Q}_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

С учетом определения компонент вектора $\mathbf{Q}$ ($Q_\alpha \equiv \sum\limits_{\beta=1}^{3} Q_{\alpha\beta}\, n_\beta$) получим:

$$\dddot{\mathbf{Q}} = \dddot{Q}\mathbf{n} = (n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} - 2n_z\mathbf{k})\left(-\frac{\dddot{Q}_0}{2}\right) = -\frac{\dddot{Q}_0}{2}\,(\mathbf{n} - 3n_z\mathbf{k}),$$

т.к. $n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} - 2n_z\mathbf{k} = \mathbf{n} - 3n_z\mathbf{k}$; $\mathbf{n}$ – единичный вектор в направлении точки наблюдения, α-частица движется вдоль оси z (см. рис. 13). В результате

$$[\dddot{\mathbf{Q}}\times\mathbf{n}] = \frac{3}{2}\,\dddot{Q}_0 n_z[\mathbf{k}\times\mathbf{n}], \qquad \ddot{\mathbf{d}} = q\ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze\,q^2}{m}\,\frac{1}{r^2}\,\mathbf{k}. \qquad (52)$$

Энергия излучения α-частицы в рассматриваемом приближении внутрь телесного угла $d\Omega$ равна:

$$d\mathcal{E} = d\Omega \int\limits_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3} \left([\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 + \frac{1}{3c} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}][\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] \right) dt. \tag{53}$$

Первое слагаемое в (53) имеет вид:

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 dt = \frac{q^2}{15\pi R} \sqrt{\left(\frac{2Ze\,q}{mRc^2}\right)^3} \sin^2\theta = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \sin^2\theta.$$

С учетом (52) получим:

$$[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}][\dddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] = \frac{Ze\,q^2}{mr^2} \frac{3}{2} \dddot{Q}_0 n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2.$$

При этом

$$Q_0 = 2qz^2,\ \dot{Q}_0 = 4qz\dot{z},\ \ddot{Q}_0 = 2q(2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z}), \dddot{Q}_0 = 4q(3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z}).$$

Соответственно из уравнения движения имеем следующие равенства:

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} \frac{Ze\,q}{z^2} = \frac{\beta}{z^2},\ \dddot{z} = -\frac{2\beta}{z^3}\dot{z}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{Zeq}{m}.$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{z^2} (3\dot{z}\ddot{z} + z\dddot{z}) dt = \int\limits_0^\infty \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z}\frac{\beta}{z^2} - z\frac{2\beta}{z^3}\dot{z} \right) dt,$$

$$\text{так как} \quad dt = \frac{dz}{\dot{z}}, \quad \text{то} \quad \int\limits_0^\infty \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z}\frac{\beta}{z^2} - z\frac{2\beta}{z^3}\dot{z} \right) dt = \beta \int\limits_R^\infty \frac{dz}{z^4} = \frac{\beta}{3R^3}.$$

Таким образом, второе слагаемое в (53) равно:

$$\frac{1}{4\pi c^4} \frac{2Ze\,q^2}{m} \frac{Ze\,q}{m} \frac{1}{3R^3} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^4 \frac{2}{16\pi} \frac{q^2}{3R} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2,$$

где использованы соотношения:

$$\frac{mv_\infty^2}{2} = \frac{Ze\,q}{R}, \quad v_\infty = \sqrt{\frac{2Ze\,q}{mR}}, \quad n_z = \cos\theta, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \sin^2\theta.$$

Окончательно для углового распределения излучения получим:

$$d\mathcal{E} = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c}\right)^3 \left(1 + \frac{5}{8}\frac{v}{c}\cos\theta\right) \sin^2\theta\, d\Omega.$$

Литература

1. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. – 399 с.
2. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. М.: Наука, 1977. – 318 с.

Составители:
Запрягаев Сергей Александрович
Крыловецкий Александр Абрамович

Редактор:
Тихомирова О.А.