

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Воронежский государственный университет
Физический факультет
Кафедра теоретической физики

Методические указания по курсу
“Электродинамика”, раздел: “Теория излучения”

для студентов 3 курса физического факультета
спец. 010400, 071500, 200200 дневного и вечернего отделений

Составители:
проф. С.А. Запрягаев
асс. А.А. Крыловецкий

ВОРОНЕЖ 2001

Общие определения

Скалярный и векторный потенциалы произвольной системы зарядов с плотностью $\rho(\mathbf{r}, t)$ и токов с плотностью $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (рис. 1) определяются выражениями:

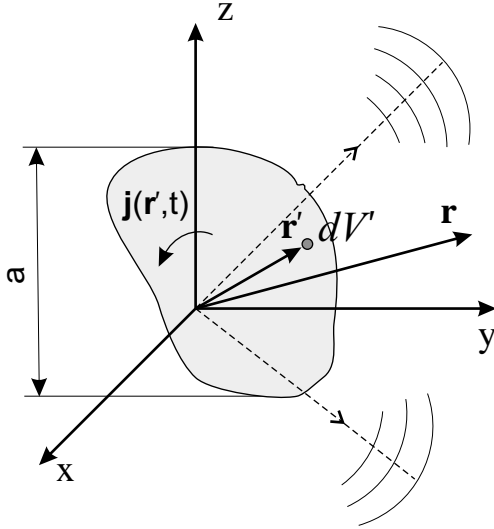


Рис. 1.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (1)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (2)$$

Известно [1], что система произвольно движущихся зарядов излучает электромагнитное поле. В соответствии с общей теорией излучения особое значение имеет поле, созданное системой зарядов в волновой зоне или на расстояниях $r \gg c/\omega$. Здесь r - расстояние до точки наблюдения от системы зарядов, ω - частота электромагнитного поля, c - скорость света. Если $r \gg c/\omega \gg a$, где a - характерные размеры системы, векторный потенциал (2) можно разложить в ряд по переменной $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')/cr$, что соответствует разложению по малому параметру $a/(c/\omega) \ll 1$. В этом случае первые три члена разложения векторного потенциала имеют вид [1]:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr} + \frac{[\dot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}(\tau)}{6c^2r} + \dots, \quad (3)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ - единичный радиус-вектор точки наблюдения, $\tau = t - r/c$ - время запаздывания, \mathbf{d} - дипольный момент системы зарядов, $\boldsymbol{\mu}$ - магнитный момент системы токов, а \mathbf{Q} - вектор, декартовы компоненты которого определены следующим соотношением:

$$Q_i = \sum_{k=1}^3 Q_{ik} n_k, \quad i \in 1, 2, 3. \quad (4)$$

Здесь Q_{ik} - компоненты тензора квадрупольного момента системы, n_k - компоненты единичного радиус-вектора. В выражении (3) точка над функцией обозначает дифференцирование по времени.

Так как в волновой зоне вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} связан с вектором индукции \mathbf{B} равенством $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$, для определения электромагнитного поля достаточно определить вектор индукции магнитного

поля $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. В результате:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]}{6c^3 r} + \dots \quad (5)$$

В произвольной точке волновой зоны плотность потока энергии определяется вектором Умова-Пойнтинга:

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{cB^2}{4\pi} \mathbf{n}. \quad (6)$$

Таким образом, энергия электромагнитного поля, излученная системой в единицу времени по всем направлениям (интенсивность излучения), определяется выражением:

$$I = \oint_S (\mathbf{s} \cdot d\mathbf{S}) = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3} + \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau)}{3c^3} + \frac{\ddot{Q}_{\alpha\beta}^2(\tau)}{180c^5} + \dots = I_d + I_\mu + I_Q + \dots \quad (7)$$

Слагаемые в выражении (7) определяют интенсивность электрически-дипольного (E1), магнитно-дипольного (M1) и электрически-квадрупольного излучения (E2), соответственно.

1 Интенсивность электрически-дипольного излучения

В соответствии с (7) интенсивность электрически-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_d(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \quad (8)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}$ – вторая производная по времени от дипольного момента системы. Энергия, излученная системой за конечный интервал времени от t_n до t_k , есть:

$$\mathcal{E} = \int_{t_n}^{t_k} I dt. \quad (9)$$

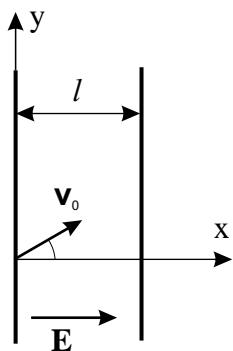
Если $t_n = -\infty$ и $t_k = +\infty$, выражение (9) определяет полную энергию, излученную системой.

Пример 1.1 Через конденсатор пролетела частица с массой m и зарядом e . Расстояние между обкладками конденсатора l , а напряжённость электрического поля \mathbf{E} в нём однородна и постоянна. Угол между вектором \mathbf{E} и направлением скорости \mathbf{v}_0 частицы при влёте равнялся α (рис. 2). Найти энергию \mathcal{E} , теряемую частицей на

дипольное излучение во время пролёта через конденсатор. (Задача №288 в [2])

Расположим начало координат в точке влёта частицы в конденсатор. Ось y направим вдоль, а ось x — перпендикулярно пластинам конденсатора (рис. 2). На основании закона Ньютона $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$. Так как дипольный момент частицы $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, находим $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = e^2\mathbf{E}/m$. Таким образом, на основании (8) для интенсивности дипольного излучения I получим выражение:

$$I = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}.$$



По оси x частица движется с постоянным ускорением, равным $a_x = \frac{eE}{m}$, а по оси y с постоянной скоростью $v_0 \sin \alpha$. Поэтому из закона движения для координат $x(t)$ и $y(t)$ заряда имеем:

$$x = tv_0 \cos \alpha + \frac{Ee}{2m}t^2, \quad y = tv_0 \sin \alpha. \quad (10)$$

Подставляя в (10) $x = l$ и решая квадратное уравнение относительно t , найдем время, в течение которого частица находится в конденсаторе:

$$t_0 = \frac{m}{eE} \left(-v_0 \cos \alpha + \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + \frac{2Eel}{m}} \right).$$

Таким образом, энергия, излученная частицей за время пролета через конденсатор, будет иметь вид:

$$\mathcal{E} = It_0 = \frac{2e^3Ev_0}{3mc^3} \left(\sqrt{\frac{2eEl}{mv_0^2} + \cos^2 \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Пусть заряд частицы равен заряду электрона, масса — массе электрона, скорость частицы при влете $v_0 = 0,01$, $\alpha = 0^\circ$, напряженность поля $E = 10^5$ В/см, расстояние между обкладками конденсатора равно $l = 1$. В этом случае отношение энергии, потерянной электроном на излучение, к его начальной кинетической энергии $\mathcal{E}/\mathcal{E}_0 \sim 10^{-10}$.

Пример 1.2 Частица с массой m и зарядом e пролетает по диаметру шара радиуса R , внутри которого равномерно распределён заряд Q . Заряды частицы и шара противоположного знака. Перед влётом в шар частица имела кинетическую энергию \mathcal{E}_0 . Определить энергию \mathcal{E} , теряемую частицей на дипольное излучение во время пролёта через шар. (Задача №289 в [2])

Выберем начало координат в центре шара (рис. 3). Пусть движение происходит вдоль оси x . Напряженность поля и потенциал внутри шара ($r \leq R$) равны, соответственно:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{R^3} \mathbf{r}, \quad \varphi = \frac{3Q}{2R} - \frac{Qr^2}{2R^3}.$$

Используя уравнение движения $m\ddot{x} = \frac{eQx}{R^3}$, на основании (8) и определения дипольного момента частицы $d = ex$ ($\dot{d} = e\dot{x}$) найдем интенсивность излучения движущейся частицы:

$$I = \frac{2\dot{d}^2}{3c^3} = \frac{2e^4Q^2x^2}{3m^2c^3R^6}.$$

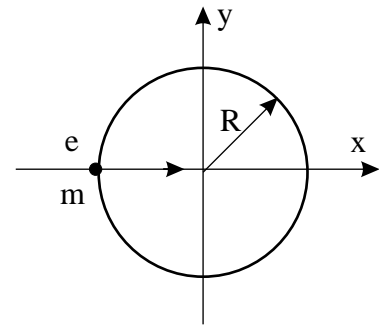


Рис. 3.

Полная энергия, теряемая частицей за время пролета через шар, равна:

$$\mathcal{E} = \int_0^{t_0} I dt = \int_{-R}^R I \frac{dx}{\dot{x}}. \quad (11)$$

Для вычисления интеграла (11) удобно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + e\varphi(x) = \mathcal{E}_0 + e\varphi(R), \quad \text{или} \quad \frac{m\dot{x}^2}{2} = \mathcal{E}_0 + \frac{Qe}{2R^3}(x^2 - R^2).$$

Выражая отсюда \dot{x} и подставляя скорость движения \dot{x} в (11), получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{2Q^2e^4}{3c^3m^2R^6} \sqrt{\frac{mR^3}{|Qe|}} \int_{-R}^R \frac{x^2 dx}{\sqrt{(U+1)R^2 - x^2}} = \\ &= \frac{2Qe^3}{3mc^2R^2} \sqrt{\frac{|Qe|}{mc^2R}} \left[(U+1) \arcsin (U+1)^{-1/2} - \sqrt{U} \right]. \end{aligned}$$

Здесь $U = \frac{2\mathcal{E}_0R}{|Qe|}$.

Пример 1.3 В классической модели атома Резерфорда электрон с массой m и зарядом e вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом $Z|e|$. Найти закон убывания полной энергии \mathcal{E} электрона, обусловленный дипольным излучением. Вычислить время t , по истечении которого электрон упадет на ядро вследствие потери энергии на дипольное излучение. В начальный момент времени $t_0 = 0$ электрон находится на расстоянии R от ядра (Задача №300 в [2]).

Отклонение от кругового движения, вызванное потерей энергии электрона на излучение, за один оборот вокруг ядра весьма мало. Поэтому в каждый момент времени кинетическая и потенциальная энергии электрона

выражаются через его полную энергию \mathcal{E} . Это обстоятельство дает возможность выразить интенсивность дипольного излучения через полную энергию электрона.

Для этого воспользуемся известной из механики теоремой вириала. Суть этой теоремы состоит в том, что если частица движется в потенциальном поле с энергией $U(x) = Ax^k$, где x - координата, то кинетическая энергия T связана с потенциальной U выражением: $T = \frac{k}{2}U$. Так как в данном случае потенциальная энергия электрона в поле ядра $U =$

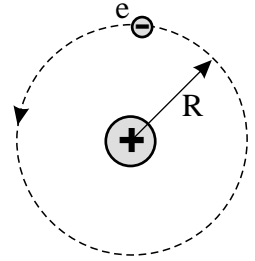


Рис. 4.

$U = -Ze^2/r$ (т.е. $k = -1$) полная энергия $\mathcal{E} = T + U = -\frac{1}{2}U + U = \frac{1}{2}U = -\frac{Ze^2}{2r}$. Соответственно уравнение движения электрона в поля ядра имеет вид $m\ddot{\mathbf{r}} = -Ze^2\mathbf{r}/r^3$. В результате интенсивность дипольного излучения равна:

$$I = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2\ddot{\mathbf{r}}^2}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{Ze^2}{mr^2} \right)^2 = \frac{32\mathcal{E}^4}{3c^3(mZe)^2}.$$

Так как интенсивность излучения — это энергия электромагнитного поля, излучаемая в единицу времени, а из закона сохранения энергии $\mathcal{E} + \mathcal{E} = const$, то $I = -\frac{d\mathcal{E}}{dt}$. В результате получаем уравнение для изменения энергии частицы со временем $-\frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}^4} = \frac{32}{3c^3(mZe)^2} dt$. Отсюда можно найти закон убывания полной энергии электрона с течением времени:

$$\frac{1}{\mathcal{E}^3} = \frac{1}{\mathcal{E}_0^3} + \frac{32t}{c^3(mZe)^2},$$

где \mathcal{E}_0 — энергия частицы в начальный момент времени $\mathcal{E}_0 = -\frac{Ze^2}{2R}$. При падении частицы на центр $\mathcal{E} \rightarrow -\infty$, так как $\mathcal{E} = -\frac{Ze^2}{2r}$. В результате время падения электрона на ядро равно $t_{\text{п}} = \frac{m^2c^3R^3}{4Ze^4}$.

Известно, что в атоме водорода электрон с наибольшей вероятностью находится на расстоянии $R = a_0 = \hbar^2/me^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-8}$ см. Отсюда время падения электрона на ядро составляет $t \sim 10^{-15}$ сек. Как видно, полученный результат противоречит наблюдаемому времени “жизни” атома водорода, который находится в основном состоянии бесконечно долго.

Этот пример демонстрирует неприменимость результатов классической теории (и механики и электродинамики) для описания объектов микромира (атомы, молекулы).

Пример 1.4 Простейшая линейная антенна представляет собой тонкий прямолинейный провод длины l , по которому течёт ток $J = J_0 \cos \omega t$. Определить интенсивность I длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №292 в [2]).

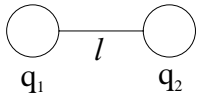


Рис. 5.

Пусть проводник соединяет две сферы (рис. 5). Заряды на сферах периодически меняются со временем. Заряд каждой сферы $q = q_0 \sin \omega t$. В этом случае ток $J = \dot{q} = q_0 \omega \cos \omega t$. В целом система представляет из себя простейший диполь: $d = ql = q_0 l \sin \omega t$, $\dot{d} = \dot{q}l = Jl$; $\ddot{d} = \dot{J}l$. В результате интенсивность дипольного излучения такой системы равна:

$$I = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}^2(\tau) = \frac{2J_0^2 \omega^2}{3c^3} l^2 \sin^2 \omega(t - r/c), \quad J_0 = q_0 \omega.$$

Интенсивность, усредненная за период колебания тока $T = 2\pi/\omega$, равна:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{J_0^2 \omega^2 l^2}{3c^3}, \quad \text{так как} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2}.$$

Пример 1.5 Протон с массой m и зарядом e движется в скрещенных электрическом и магнитном полях с напряженностью \mathbf{E} и индукцией \mathbf{B} , которые удовлетворяют условиям $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = 0$. Внешние поля однородны и постоянны, а протон в начальный момент времени $t_0 = 0$ имел скорость \mathbf{v}_0 . Определить энергию дипольного излучения, теряемую частицей за время t (Задача №291 в [2]).

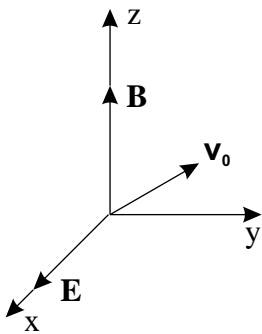


Рис. 6.

Выберем систему координат, как указано на рис. 6. Уравнение движения в этом случае есть:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = eE\mathbf{i} + \frac{e}{c}v_y B\mathbf{i} - \frac{e}{c}v_x B\mathbf{j},$$

$$\text{так как} \quad [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Таким образом, квадрат ускорения $\ddot{\mathbf{r}}^2$ равен:

$$\ddot{\mathbf{r}}^2 = \frac{1}{m^2} \left(eE + \frac{e}{c}v_y B \right)^2 + \frac{e^2}{c^2} v_x^2 B^2 = \frac{e^2}{m^2 c^2} B^2 \left[\left(v_y + \frac{E}{B} c \right)^2 + v_x^2 \right].$$

В скрещенных полях квадрат ускорения является интегралом движения, что можно проверить прямым дифференцированием. Используя уравнения

движения: $m\ddot{x} = eE + \frac{e}{c}\dot{y}B$, $m\ddot{y} = -\frac{e}{c}B\dot{x}$, получаем:

$$\frac{d}{dt} \frac{m^2 \dot{\mathbf{r}}^2}{2} = \frac{eB}{cm} \left[\left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B \right) \left(-\frac{e}{c}B\dot{x} \right) + \left(-\frac{e}{c}B\dot{x} \right) \left(eE + \frac{e}{c}\dot{y}B \right) \right] = 0$$

Поэтому интенсивность излучения – постоянная величина. Следовательно, энергия дипольного излучения, теряемая частицей за время t , есть:

$$\mathcal{E} = \frac{2\ddot{\mathbf{d}}^2}{3c^3}t = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}^2t = \frac{2e^4B^2}{3m^2c^5} \left[\left(v_{0y} + \frac{Ec}{B} \right)^2 + v_{0x}^2 \right] t.$$

Пример 1.6 Индукция \mathbf{B} магнитного поля в полупространстве однородна, постоянна и направлена параллельно граничной плоскости. В это полупространство влетает протон с массой m и зарядом e . Скорость \mathbf{v} протона при влёте перпендикулярна граничной плоскости. Определить энергию \mathcal{E} , теряемую протоном на дипольное излучение за время движения в магнитном поле (Задача №290 в [2]).

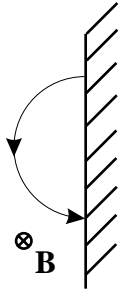


Рис. 7.

Уравнение движения протона имеет вид: $m\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Отсюда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}], \quad \ddot{\mathbf{r}}^2 = \left(\frac{e}{mc} \right)^2 v^2 B^2. \quad \text{Энергия частицы в магнитном}$$

поле не меняется с течением времени $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}) = 0$.

Поэтому $v^2 = \text{const}$ и $\ddot{\mathbf{r}}^2 = \text{const}$. Так как $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}$ для интенсивности дипольного излучения имеем:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 = \frac{2e^4v^2B^2}{3m^2c^5}.$$

Выясним, как будет двигаться протон в магнитном поле. Из уравнения движения получаем $\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{mc}[\mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Направив ось z вдоль вектора \mathbf{B} , находим:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0, \quad \text{где } \omega = \frac{eB}{mc}. \quad (12)$$

Умножим второе из уравнений в (12) на мнимую единицу i и сложим с первым уравнением из (12). В результате:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y). \quad (13)$$

Интегрируя (13), получим $v_x + iv_y = v \exp[-i(\omega t + \alpha)]$. Отделив действительную и мнимую части, находим:

$$v_x = v \cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v \sin(\omega t + \alpha), \quad (14)$$

где α – угол, который составляет вектор \mathbf{v} с осью x в момент времени $t = 0$. Интегрируя (14), имеем:

$$x = x_0 + r \sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r \cos(\omega t + \alpha), \quad r = v/\omega.$$

Интегрируя дважды третье уравнение в (12), находим $z = z_0$. Выбирая систему координат так, что $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, ясно, что протон движется по окружности радиуса r с периодом обращения $T = 2\pi/\omega$. Таким образом, энергия излучения протона за время движения в поле есть: $\mathcal{E} = I \frac{T}{2} = \frac{2\pi e^3 v^2 B}{3mc^4}$.

2 Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение

В соответствии с общей теорией излучения интенсивность магнитно-дипольного излучения определяется выражением:

$$I_\mu = \frac{2\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \quad (15)$$

где $\boldsymbol{\mu}$ — магнитный момент системы. Соответственно интенсивность квадрупольного излучения определяется выражением:

$$I_Q = \frac{1}{180c^5} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2(\tau). \quad (16)$$

Пример 2.1 *Простейшая рамочная антенна представляет собой прямоугольную рамку со сторонами a и b , по которой течёт линейный ток $J = J_0 \cos \omega t$. Определить интенсивность I длинноволнового излучения антенны в среднем по времени за период колебания тока (Задача №313 в [2]).*

По определению магнитный момент линейного тока J равен $\boldsymbol{\mu} = \frac{J}{2c} \int [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$. Так как $[\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = 2\mathbf{n} dS$, где dS — площадь элементарного треугольника, образованного двумя радиус-векторами, проведенными к обоим концам элемента длины $d\mathbf{l}$, а \mathbf{n} — нормаль к поверхности треугольника, магнитный момент замкнутого контура с током определяется выражением: $\boldsymbol{\mu} = \frac{JS}{c} \mathbf{n}$. В данной задаче $S = ab$. Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{abJ_0}{c} \cos(\omega t) \mathbf{n}, \quad \ddot{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{abJ_0\omega^2}{c} \cos(\omega t) \mathbf{n}.$$

Отсюда интенсивность магнитно-дипольного излучения такой антенны равна:

$$I = \frac{2J_0^2\omega^4 a^2 b^2}{3c^5} \cos^2(\omega t),$$

а интенсивность, усредненная за период колебания

тока, есть:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt = \frac{J_0^2 \omega^4 a^2 b^2}{3c^5}.$$

Пример 2.2 В тонкой неподвижной квадратной рамке со стороной l возбуждён ток $J = J_0 e^{-\alpha t^2}$. Определить полную энергию \mathcal{E} длинноволнового излучения за время $-\infty < t < \infty$. (Задача №320 в [2])

Ток в квадратной рамке создает магнитный момент $\boldsymbol{\mu} = \frac{Jl^2}{c} \mathbf{n} = \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} \mathbf{n}$, где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к рамке. Так как $\boldsymbol{\mu}$ зависит от времени, возникает магнитно-дипольное излучение, интенсивность которого определяется выражением (15). Вычисляя вторую производную от магнитного момента, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} (-2\alpha t) \mathbf{n}, & \ddot{\boldsymbol{\mu}} &= \frac{J_0 l^2}{c} e^{-\alpha t^2} (4\alpha^2 t^2 - 2\alpha) \mathbf{n}, \\ \ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 &= \frac{l^4}{c^2} J_0^2 e^{-2\alpha t^2} 4\alpha^2 (4\alpha^2 t^4 - 4\alpha t^2 + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, полная энергия, излученная рамкой за время $-\infty < t < \infty$, определяется выражением:

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} I_{\mu} dt = \frac{J_0^2 l^4 \alpha}{c^5} \sqrt{2\pi\alpha}. \quad \text{Здесь учтено, что } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Пример 2.3 Однородно заряженный тонкий диск радиуса R вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω . Полный заряд диска равен q . Найти интенсивность I излучения такой системы. (Задача №343 в [2])

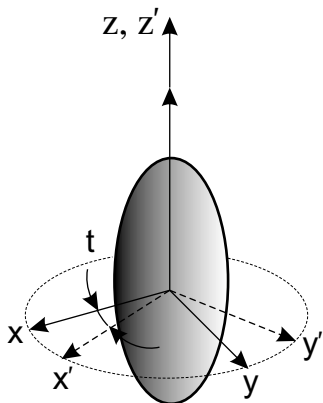


Рис. 8.

Магнитный момент диска $\boldsymbol{\mu} = qR^2\omega/8c$ и $\ddot{\boldsymbol{\mu}} = 0$, следовательно, магнитно-дипольное излучение отсутствует. Излучение обусловлено изменяющимся квадрупольным моментом. Вычислим компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$. Свяжем с диском систему координат K' : оси x' и z' лежат в плоскости диска, а ось y' перпендикулярна плоскости диска (см. рис. 8). Компоненты тензора квадрупольного момента в системе координат K' равны:

$$Q'_{\alpha\beta} = \int \sigma (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r'^2) ds', \quad \alpha, \beta \in 1, 2, 3.$$

Вычисление этих компонент приводит к следующим результатам:

$$Q'_{yy} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sigma(3y'^2 - r'^2)r' dr' d\alpha' = -\frac{qR^2}{2}, \quad Q'_{xx} = Q'_{zz} = \frac{qR^2}{4},$$

$$Q_{xy} = Q_{xz} = Q_{yz} = 0.$$

Или в матричном виде:

$$Q'_{\alpha\beta} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

Компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в системе K найдем, используя стандартное преобразование поворота системы координат на угол

$\varphi = \omega t$ вокруг осей z, z' : $Q_{\mu\nu} = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 a_{\mu\alpha} Q'_{\alpha\beta} a_{\beta\nu}^T$, где матрица преобразований имеет вид

$$a_{\mu\alpha} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В результате: $Q = aQ'a^T$,

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

После умножения матриц для матрицы тензора квадрупольного момента в системе координат K находим:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos^2 \omega t - 2 \sin^2 \omega t & 3 \sin \omega t \cos \omega t & 0 \\ 3 \sin \omega t \cos \omega t & \sin^2 \omega t - 2 \cos^2 \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}. \quad (17)$$

Вычисляя третью производную по времени от Q , после стандартных тригонометрических преобразований получим:

$$\ddot{Q} = \frac{3}{2}(2\omega)^3 \begin{pmatrix} \sin 2\omega t & -\cos 2\omega t & 0 \\ -\cos 2\omega t & -\sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{qR^2}{4}.$$

И соответственно

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^3 \ddot{Q}_{\alpha\beta}^2 = 18\omega^6 q^2 R^4.$$

Таким образом, интенсивность излучения однородно заряженного диска, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, равна:

$$I = \frac{1}{180c^5} 18\omega^6 q^2 R^4 = \frac{q^2 R^4 \omega^6}{10c^5}.$$

Пример 2.4 Однородный шар радиуса R вращается около своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω . Ось вращения наклонена под углом θ к направлению внешнего постоянного однородного магнитного поля \mathbf{B} . Заряд и масса шара Q и m . Определить интенсивность излучения I (Задача №318 в [2]).

Магнитный момент шара равен:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{QR^2}{5c} \boldsymbol{\omega}. \quad (18)$$

Воспользуемся известным уравнением движения для механического момента \mathbf{L} системы: $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{K}$, где $\mathbf{K} = \sum [\mathbf{r} \times \mathbf{f}]$ – сумма моментов всех сил, действующих на систему. Учитывая связь между магнитным и механическим моментами: $\boldsymbol{\mu} = \frac{Q}{2mc} \mathbf{L}$, а также выражение для момента сил, действующих на систему токов с магнитным моментом $\boldsymbol{\mu}$: $\mathbf{K} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}]$, получим следующее уравнение движения магнитного момента, находящегося во внешнем поле:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \frac{Q}{2mc} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}], \quad \frac{d^2\boldsymbol{\mu}}{dt^2} = \frac{Q^2}{(2mc)^2} [[\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] \times \mathbf{B}],$$

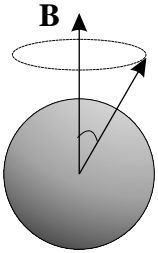


Рис. 9.

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4} (\mu^2 \mathbf{B}^4 - \mathbf{B}^2 (\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B})^2). \quad (19)$$

Выберем систему координат так, что направление оси z совпадает с направлением магнитного поля (см. рис. 9). Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\mu}} = \frac{Q}{2mc} [\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}] = \frac{Q}{2mc} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mu_x & \mu_y & \mu_z \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}.$$

Отсюда:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = \Omega \mu_y, \quad \frac{d\mu_y}{dt} = -\Omega \mu_x, \quad \frac{d\mu_z}{dt} = 0, \quad \text{где } \Omega = \frac{QB}{2mc}. \quad (20)$$

Умножая второе уравнение в (20) на i и складывая с первым, получим: $\frac{d}{dt}(\mu_x + i\mu_y) = -i\Omega(\mu_x + i\mu_y)$. Интегрируя последнее равенство, имеем

$\mu_x + i\mu_y = \mu_t e^{-i(\Omega t + \alpha)}$. Отделяя действительную и мнимую части в полученном соотношении, находим:

$$\mu_x = \mu_t \cos(\Omega t + \alpha), \quad \mu_y = -\mu_t \sin(\Omega t + \alpha), \quad (21)$$

где μ_t — проекция вектора $\boldsymbol{\mu}$ на плоскость xy . Интегрируя уравнение $\dot{\mu}_z = 0$ в (20), получаем $\mu_z = \text{const}$, и, следовательно, $(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \text{const}$. Таким образом, с учетом (21), получаем, что магнитный момент вращается вокруг направления поля, сохраняя свою абсолютную величину и угол с направлением поля (ларморова прецессия). Частота вращения $\Omega = \frac{QB}{2mc}$ носит название ларморовой частоты. Учитывая, что $(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}) = \mu B \cos \theta$, получим из (19)

$$\ddot{\mu}^2 = \frac{Q^4}{(2mc)^4} \mu^2 B^4 (1 - \cos^2 \theta) = \frac{Q^4}{(2mc)^4} \mu^2 B^4 \sin^2 \theta.$$

С учетом равенства (18) и значения ларморовой частоты Ω находим окончательно для интенсивности излучения вращающегося шара следующее выражение: $I = \frac{Q^2 \omega^2}{600c} \left(\frac{QRB}{mc^2} \right)^4 \sin^2 \theta$.

3 Спектральное разложение излучения

Спектральная плотность излучения $\mathcal{E}(\omega)$ определяется как энергия, приходящаяся на единичный интервал частот. Полная энергия, излученная за все время действия источника \mathcal{E} , связана со спектральной плотностью излучения $\mathcal{E}(\omega)$ следующим соотношением:

$$\mathcal{E} = \int_0^{\infty} d\mathcal{E}_\omega = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(\omega) d\omega.$$

В соответствии с общей теорией излучения мультипольное разложение энергии, излученной в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, представляется в виде бесконечного ряда. Первые три члена этого ряда (с учетом E2-излучения) равны:

$$d\mathcal{E}_\omega = \left(\frac{4|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{4|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} + \frac{|\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)|^2}{90c^5} + \dots \right) d\omega, \quad (22)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)$ и $\ddot{Q}_{\alpha\beta}(\omega)$ — Фурье компоненты вторых производных по времени дипольного $\mathbf{d}(t)$, магнитного $\boldsymbol{\mu}(t)$ и квадрупольного $Q_{\alpha\beta}(t)$ моментов соответственно. При этом последовательно слагаемые ряда (22) определяют спектральную плотность электрически-дипольного (E1),

магнитно-дипольного (M1) и электрически-квадрупольного излучения (E2).
Фурье компонента $f(\omega)$ функции $f(t)$ определяется соотношением: $f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} f(t) dt$.

Пример 3.1 До начального момента времени $t_0 = 0$ электрон с массой m и зарядом e покоился. При $t \geq 0$ он движется под действием электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$. Найдите энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную электроном на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №351 в [2]).

Закон движения электрона под действием поля запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{E}e$, где e — заряд электрона. Дипольный момент электрона равен: $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$. Дифференцируя дважды по времени $\mathbf{d}(t)$, с учетом уравнения движения находим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0, \\ \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t, & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Для вычисления спектральной плотности распределения излучения вычислим Фурье-образ $\ddot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \int_0^{+\infty} [e^{i(\omega+\omega_0)t} + e^{i(\omega-\omega_0)t}] e^{-\alpha t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{2m} \left[\frac{1}{\alpha - i(\omega + \omega_0)} + \frac{1}{\alpha - i(\omega - \omega_0)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{e^4 E_0^2}{2\pi m^2} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]}.$$

На основании (22) находим искомую энергию электрически-дипольного излучения в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\alpha^2 + \omega^2}{[\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]} d\omega. \quad (23)$$

Пример 3.2 Неподвижный шар равномерно заряжен с объемной плотностью ρ положительным зарядом. Внутри шара на расстоянии a от его центра в моменты времени $t \leq 0$ покоился электрон с массой

t и зарядом e . В последующее время $t > 0$ электрон движется под действием электрического поля шара. Учитывая силу радиационного трения, определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$ дипольного излучения, приходящуюся на интервал частот от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №353 в [2]).

Сила радиационного трения — это сила, действующая на излучающую заряженную частицу со стороны излучаемого частицей электромагнитного поля. В случае, если скорость движения частицы $v \ll c$, сила радиационного трения имеет вид:

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\mathbf{r}}, \quad (24)$$

где e и \mathbf{r} — заряд и радиус-вектор частицы.

Напряженность электрического поля, создаваемая заряженным шаром внутри него, равна: $\mathbf{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\mathbf{r}$. Следовательно, уравнение движения электрона внутри шара с учетом силы (24) запишется в виде:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{4}{3}\pi\rho|e|\mathbf{r} + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{r}}, \quad \text{или} \quad \ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} - \frac{2e^2}{3c^3m}\ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad (25)$$

где введено обозначение $\omega_0^2 = \frac{4}{3m}\pi\rho|e|$. Сила радиационного трения много меньше кулоновской силы, поэтому уравнение (25) можно решать методом последовательных приближений. Отбрасывая член с третьей производной в уравнении (25), получаем: $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$ откуда $\dot{\mathbf{r}} = -\omega_0^2\mathbf{r}$. Подставляя это выражение в (25) и вводя обозначение: $\gamma = \frac{2e^2\omega_0^2}{3c^3m}$, получаем следующее уравнение:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0. \quad (26)$$

Так как электрон движется по прямой, выберем ось x в направлении движения электрона. Общее решение дифференциального уравнения (26) в этом случае с учетом $\gamma \ll \omega_0$ есть:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t).$$

Подставляя начальные условия $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$, находим $A = a$, $B = \frac{\gamma a}{2\omega_0}$.

В результате:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)\left(a \cos \omega_0 t + \frac{\gamma a}{2\omega_0} \sin \omega_0 t\right). \quad (27)$$

Второе слагаемое в (27) можно отбросить, так как $\gamma \ll \omega_0$. С учетом этого для $\ddot{\mathbf{d}}$ получим:

$$\ddot{\mathbf{d}}(t) = \omega_0^2|e|\mathbf{a} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right) \cos \omega_0 t.$$

Сравнивая полученное выражение для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ с выражением для $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ в примере 3.1, находим для Фурье компонент дипольного момента:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{\omega_0^4 e^2 a^2}{2\pi} \frac{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_0^2}{\left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega + \omega_0)^2\right] \left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2\right]}. \quad (28)$$

Как следует из (28), основной вклад в $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$ вносят значения $\omega \approx \omega_0$. Полагая $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$, получим:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 \simeq \frac{\omega_0^4 e^2 a^2}{8\pi \left[\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2\right]}. \quad (29)$$

Таким образом, с учетом сделанных приближений на основании (22) энергия излучения в интервале частот $d\omega$ есть:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{e^2 a^2 \omega_0^4}{6\pi c^3} \frac{1}{\frac{\gamma^2}{4} + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Пример 3.3 *Магнитный момент токов, текущих в весьма малой области пространства, меняется со временем по закону $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0 e^{-t^2/T^2}$, где $\boldsymbol{\mu}_0$ — постоянный вектор, а T — постоянная. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за бесконечное время от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №366 в [2]).*

Энергия $d\mathcal{E}_\omega$, излученная в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, в данном случае определяется слагаемым, соответствующим магнитно-дипольному излучению

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{4|\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega)|^2}{3c^3} d\omega. \quad (30)$$

По свойству Фурье преобразования имеем $\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\omega^2 \boldsymbol{\mu}(\omega)$. Фурье образ $\boldsymbol{\mu}(\omega)$ равен:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \boldsymbol{\mu}_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\omega t - t^2/T^2) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \boldsymbol{\mu}_0 T \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

При вычислении в показателе экспоненты необходимо выделить полный квадрат и использовать интеграл Пуассона. Таким образом,

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2 \boldsymbol{\mu}_0 T \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{4}\right).$$

На основании (30) получаем окончательный ответ:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\boldsymbol{\mu}_0^2 T^2 \omega^4}{3c^3} \exp\left(-\frac{\omega^2 T^2}{2}\right) d\omega.$$

Пример 3.4 На отрезке длины l течет линейный ток $J = J_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$, где постоянные величины удовлетворяют неравенствам $\alpha l \ll c$ и $\omega_0 l \ll c$. В моменты времени $t \leq 0$ ток равнялся нулю. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №352 в [2]).

В данной системе возникает электрически-дипольное излучение, так как $\mathbf{d}(t) = q(t)\mathbf{l}$, где вектор \mathbf{l} направлен вдоль отрезка длиной l и по модулю равен длине отрезка. Дифференцируя $\mathbf{d}(t)$ и подставляя выражение для J , находим:

$$\dot{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{l} J_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.$$

Найдем Фурье образ для функции $\dot{\mathbf{d}}(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}(\omega) &= \frac{\mathbf{l} J_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\omega t - \alpha t} \sin \omega_0 t dt = \\ &= \frac{\mathbf{l} J_0}{2i\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{\alpha - i(\omega + \omega_0)} - \frac{1}{\alpha - i(\omega - \omega_0)} \right]. \end{aligned} \quad (31)$$

С использованием свойств Фурье преобразования, получаем: $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -i\omega \dot{\mathbf{d}}(\omega)$. Отсюда, после подстановки выражения для $\dot{\mathbf{d}}(\omega)$ из формулы (31) получим следующее выражение для $|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2$:

$$|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2 = \frac{J_0^2 l^2 \omega^2 \omega_0^2}{2\pi [\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2] [\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2]}. \quad (32)$$

Подставляя это выражение в формулу (22), находим окончательно:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2J_0^2 l^2 \omega_0^2}{3\pi c^3} \frac{\omega^2}{[\alpha + (\omega + \omega_0)^2] [\alpha + (\omega - \omega_0)^2]} d\omega.$$

Пример 3.5 Электрон с массой m и зарядом e влетает в полупространство, в котором напряженность \mathbf{E} электрического поля однородна и постоянна. Направление скорости \mathbf{v}_0 электрона при влете образует с вектором \mathbf{E} острый угол α . Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за все время движения во внешнем поле (Задача №360 в [2]).

Пусть вектор \mathbf{E} направлен перпендикулярно к плоскости, разделяющей два полупространства. Ось y направим вдоль вектора \mathbf{E} , начало координат поместим в точку влета электрона в поле. Основной вклад в излучение дает дипольное излучение. Вторая производная от дипольного момента, очевидно, равна: $\ddot{\mathbf{d}} = -|e|\ddot{\mathbf{r}}$. Закон движения электрона в электрическом поле запишется в виде $m\ddot{\mathbf{r}} = -|e|\mathbf{E}$. Откуда получаем $\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2 \mathbf{E}}{m}$. Фурье образ дипольного

момента выражается через интеграл:

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}}{m} \int_0^\tau e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^2 \mathbf{E}}{\omega m} e^{i\omega\tau/2} \sin \frac{\omega\tau}{2}, \quad (33)$$

где τ — время движения электрона в поле. Это время можно найти, решив уравнение движения. С учетом начальных условий решение уравнения движения есть:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t - \frac{|e| \mathbf{E}}{2m} t^2.$$

Проецируя это уравнение на ось y и выбирая $y = 0$, получаем соотношение, из которого можно найти время нахождения частицы в поле

$$v_0 \cos \alpha t - \frac{|e| E}{2m} t^2 = 0. \quad (34)$$

Очевидно, что электрон влетевший в поле, пролетев по параболе, вылетает из него. Таким образом, уравнение (34) имеет два решения для t : $t = 0$ и $t = \frac{2v_0 m \cos \alpha}{|e| E}$. Первое решение соответствует моменту влета электрона в электрическое поле, а второе — равно τ — искомому времени движения частицы в поле. Подставляя τ в (33) и $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ в (22), получаем энергию, излученную электроном в поле в интервале частот $d\omega$:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{8e^4 E^2}{3\pi m^2 c^3 \omega^2} \sin^2 \frac{\omega m v_0 \cos \alpha}{|e| E} d\omega.$$

Пример 3.6 По неподвижной тонкой рамке в неограниченном промежутке времени $-\infty < t < \infty$ течет линейный ток $J = J_0 \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2}$, где J_0 и τ — некоторые постоянные. Площадь рамки S , а ее линейные размеры малы по сравнению с величиной $c\tau$, где c — скорость света в вакууме. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную на частотах в интервале от ω до $\omega + d\omega$ (Задача №367 в [2]).

Излучение данной системы — магнитно-дипольное. Магнитный момент линейного тока вычисляется по формуле:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \frac{J \mathbf{S}}{c} = \frac{J_0 \mathbf{S} \tau t}{c(\tau^2 + t^2)}, \quad (35)$$

где вектор \mathbf{S} по модулю равен площади рамки S и направлен перпендикулярно плоскости рамки. Фурье образ функции $\boldsymbol{\mu}(t)$ ищем в виде:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{J_0 \mathbf{S}}{\sqrt{2\pi} c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau t}{\tau^2 + t^2} e^{i\omega t} dt.$$

Этот интеграл вычисляется с использованием теории вычетов, в результате чего получаем:

$$\boldsymbol{\mu}(\omega) = \frac{iJ_0 \mathbf{S} \tau \pi}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\omega \tau}.$$

На основании свойств фурье преобразования находим:

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\omega) = -\omega^2 \boldsymbol{\mu} = -\frac{iJ_0 \mathbf{S} \omega^2 \tau \pi}{\sqrt{2\pi c}} e^{-\omega \tau}.$$

Таким образом, искомая энергия излучения имеет вид:

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{2\pi J_0^2 S^2 \tau^2}{3c^5} \omega^4 e^{-2\omega \tau} d\omega.$$

4 Угловое распределение излучения

Угловое распределение излучения определяет энергию, излучаемую системой в единицу времени внутрь телесного угла $d\Omega = \sin^2 \theta d\theta d\varphi$, где θ и φ — углы сферической системы координат. В свободном пространстве структура поля в волновой зоне определяется тройкой ортогональных векторов \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{n} , где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении распространения поля, а $E = B$, $\mathbf{E} = [\mathbf{B} \times \mathbf{n}]$. Вектор Умова-Пойнтинга в этом случае равен (т.к. $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) = 0$):

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}] = \frac{cB^2}{4\pi} \mathbf{n}.$$

Энергия, проходящая в единицу времени через бесконечно малый элемент поверхности $dS = r^2 d\Omega$, равна

$$dI = \mathbf{s} \cdot d\mathbf{S} = |\mathbf{s}| r^2 d\Omega = \frac{cB^2 r^2}{4\pi} d\Omega. \quad (36)$$

Из общей теории излучения следует, что мультипольное разложение вектора индукции на больших расстояниях можно представить в виде бесконечного ряда (см. [1]):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}]}{6c^3 r} + \dots, \quad \tau = t - r/c, \quad (37)$$

где вектор \mathbf{Q} имеет компоненты $Q_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} n_\beta$, $Q_{\alpha\beta}$ — тензор квадрупольного момента.

Формула (37) заметно упрощается, когда излучающая система характеризуется только одним дипольным моментом, магнитным моментом

или тензором квадрупольного момента, и угловое распределение интенсивности излучения принимает в этих случаях вид

$$dI_d = \frac{[\ddot{\mathbf{d}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega \quad \text{— E1-излучение,} \quad (38)$$

$$dI_\mu = \frac{[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega \quad \text{— M1-излучение,} \quad (39)$$

$$dI_Q = \frac{[\ddot{\mathbf{Q}}(\tau) \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5} d\Omega \quad \text{— E2-излучение.} \quad (40)$$

Угловое распределение энергии, излученной за все время действия источника, получается путем интегрирования интенсивности излучения (36) по времени

$$d\mathcal{E} = \frac{cr^2}{4\pi} d\Omega \int_{-\infty}^{\infty} B^2(\mathbf{r}, t) dt. \quad (41)$$

Разлагая в (41) индукцию магнитного поля $B(\mathbf{r}, t)$ в интеграл Фурье по переменной t , можно определить энергию $d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале ω до $\omega + d\omega$:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{cr^2}{2\pi} |\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\Omega d\omega. \quad (42)$$

Пример 4.1 Частица с массой m и зарядом e движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с индукцией \mathbf{B}_0 . Скорость частицы по абсолютной величине равна v . Найти интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период движения частицы (Задача №375 в [2]).

Интенсивность дипольного излучения в элемент $d\Omega$ телесного угла выражается через индукцию \mathbf{B} магнитного поля излучаемой волны, которая, согласно (37), равна:

$$\mathbf{B} = \frac{[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]}{c^2 r} + \dots, \quad (43)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения. Так как дипольный момент заряда $\mathbf{d} = e\mathbf{r}_e$ (\mathbf{r}_e — радиус-вектор положения заряда в пространстве), $\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}}_e$. Ускорение частицы определяется из уравнения движения:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}_e = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{e}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y, \\ \dot{v}_y = -\omega v_x, \end{cases} \quad (44)$$

где учтено, что частица движется в плоскости xy , ортогональной вектору \mathbf{B} , и введено обозначение $\omega \equiv \frac{eB}{mc}$. Решая (44), находим, что частица движется по окружности с угловой скоростью ω . Отсюда,

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{mc} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_0] = -\frac{e^2 v B_0}{mc} \mathbf{n}'(t),$$

где

$$\mathbf{n}'(t) = \mathbf{i} \cos(\omega t) + \mathbf{j} \sin(\omega t). \quad (45)$$

Здесь \mathbf{n}' - единичный вектор, направленный по радиус-вектору \mathbf{r}_e частицы. По определению, единичный радиус-вектор точки наблюдения есть:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Таким образом, интенсивность dI дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в момент времени t равна:

$$dI = \frac{v^2 \omega^2}{4\pi c^3} [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 d\Omega. \quad (46)$$

Учитывая равенство $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]^2 = a^2 b^2 - (\mathbf{ab})^2$, находим:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 &= 1 - (\mathbf{nn}')^2 = \\ &= 1 - (\cos \varphi \cos \omega t + \sin \varphi \sin \omega t)^2 \sin^2 \theta = \\ &= 1 - \cos^2(\omega t - \varphi) \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Очевидно, что среднее за период полученного выражения равно:

$$\langle [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{n}' \times \mathbf{n}]^2 dt = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta). \quad (47)$$

Таким образом, с учетом (47) получаем окончательно:

$$\langle dI \rangle = \frac{e^4 v^2 B_0^2}{8\pi m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

Пример 4.2 Протон с массой m и зарядом e покидает неподвижное ядро, радиус которого R , а остаточный заряд Ze . При вылете из ядра скорость протона равнялась нулю. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии дипольного излучения, обусловленного кулоновским взаимодействием протона с ядром.

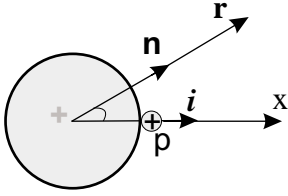


Рис. 10.

С учетом (37) и (41) получим:

$$d\mathcal{E} = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 d\Omega dt.$$

На основании уравнения движения для второй производной по времени от дипольного момента находим $\ddot{\mathbf{d}} = e \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{Ze^3}{mr^2} \mathbf{i}$. Здесь \mathbf{i} – единичный вектор в направлении движения протона (ось x). Если \mathbf{n} – единичный вектор в направлении точки наблюдения, то

$$[\ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 = \frac{Z^2 e^6}{m^2 x^4} \sin^2 \theta.$$

Отсюда:

$$d\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{Z^2 e^6}{m^2} \sin^2 \theta \int_0^{\infty} \frac{dt}{x^4}, \quad (48)$$

где $x = x(t)$. Зависимость энергии излучения от угла между \mathbf{n} и \mathbf{d} определяется множителем $\sin^2 \theta$. Для определения величины энергии излучения надо вычислить лишь общий множитель:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\infty} \frac{dt}{x^4} = \int_R^{\infty} \frac{dx}{x^4 \dot{x}}. \quad (49)$$

На основании закона сохранения энергии имеем: $\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Ze^2}{x} = \frac{Ze^2}{R}$, отсюда можно выразить скорость частицы \dot{x} через координату x :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2Ze^2}{mR} \left(1 - \frac{R}{x}\right)}.$$

Подставляя \dot{x} в (49) и выполняя замену переменной $u = 1 - R/x$, $du = Rdx/x^2$, $u(x=R) = 0$, $u(x=\infty) = 1$, можно вычислить общий множитель \mathcal{J} в (48):

$$\mathcal{J} = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}} \int_0^1 \frac{1}{R^3} \frac{du}{\sqrt{u}} (1-u)^2 = \sqrt{\frac{mR}{2Ze^2}} \frac{1}{R^3} \frac{16}{15}, \quad \text{т. к. } \int_0^1 \frac{(1-y)^2 dy}{\sqrt{y}} = \frac{16}{15}.$$

Окончательно⁰ получим следующее выражение для углового распределения излучения:

$$d\mathcal{E} = \frac{e^2}{15\pi R} \sqrt{\left(\frac{2Ze^2}{mRc^2}\right)^3} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Пример 4.3 Однородно заряженный цилиндр радиуса R и высоты h вращается с постоянной угловой скоростью ω около оси, проходящей через среднюю точку цилиндра перпендикулярно оси его симметрии. Полный заряд равен q . Определить интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения (Задача №379 в [2]).

Начало покоящейся системы координат поместим в средней точке цилиндра, а ось z выберем вдоль вектора угловой скорости (см. рис. 11). Дипольный момент цилиндра равен нулю. Магнитный момент вращающегося с постоянной угловой скоростью цилиндра от времени не зависит. Поэтому излучение будет определяться изменяющимся во времени квадрупольным моментом.

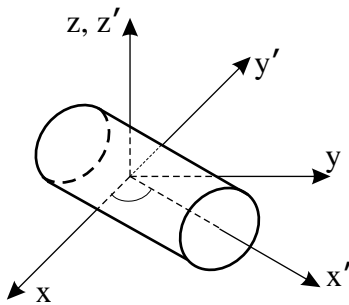


Рис. 11.

Жестко связанная с цилиндром штрихованная система координат $x'y'z'$ вращается около оси z' ($z' \equiv z$), причем ось x' совпадает с осью цилиндра. Тензор квадрупольного момента Q' в штрихованной системе координат $x'y'z'$ имеет вид:

$$Q'_{\alpha\beta} = Q \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{q}{4} \left(\frac{h^2}{3} - R^2 \right).$$

Найдем теперь компоненты тензора квадрупольного момента $Q_{\alpha\beta}$ в неподвижной системе координат:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta} = \sum_{\gamma, \delta=1}^3 a_{\alpha\gamma} Q'_{\gamma\delta} a_{\delta\beta}^T, \quad \alpha, \beta \in 1, 2, 3, \quad (50)$$

где $a_{\alpha\gamma}$ — матрица преобразования компонент радиуса-вектора при повороте системы координат: $x_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} x'_\beta$. Учитывая выбор систем координат (см. рис. 11), для матрицы поворота имеем:

$$a_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом $z = z'$, $\varphi = \omega t$. Вычисляя произведение матриц на основании (50)

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \cos 2\varphi + 1 & 3 \sin 2\varphi & 0 \\ 3 \sin 2\varphi & -3 \cos 2\varphi + 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Q. \quad (51) \end{aligned}$$

Отсюда можно определить выражение для $\ddot{Q}_{\alpha\beta}$:

$$\ddot{Q}_{\alpha\beta} = -12Q\omega^3 \begin{pmatrix} -\sin 2\omega t & \cos 2\omega t & 0 \\ \cos 2\omega t & \sin 2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единичный радиус-вектор точки наблюдения, выраженный через переменные сферической системы координат, есть:

$$\mathbf{n} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}.$$

Обозначая через n_α компоненты единичного радиус-вектора точки наблюдения поля, вычислим компоненты третьей производной по времени вектора \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_1 &= \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{1\alpha} n_\alpha = -(-\sin 2\omega t \sin \theta \cos \varphi + \cos 2\omega t \sin \theta \sin \varphi) 12Q\omega^3 = \\ &= 12Q\omega^3 \sin \theta \sin(2\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{Q}_2 &= \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{2\alpha} n_\alpha = -12Q\omega^3 \sin \theta (\cos 2\omega t \cos \varphi + \sin 2\omega t \sin \varphi) = \\ &= -12Q\omega^3 \sin \theta \cos(2\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

$$\ddot{Q}_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \ddot{Q}_{3\alpha} n_\alpha = 0,$$

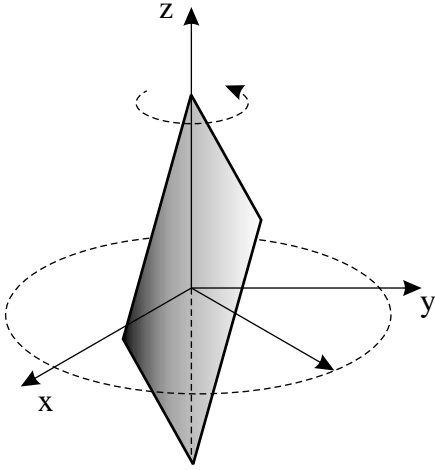
или

$$\ddot{\mathbf{Q}} = 12Q\omega^3 \sin \theta \left\{ \sin(2\omega t - \varphi) \mathbf{i} - \cos(2\omega t - \varphi) \mathbf{j} + 0 \mathbf{k} \right\}.$$

В результате из (40) следует выражение для энергии излучаемой такой системой в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$:

$$dI_Q = \frac{[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}]^2}{144\pi c^5} d\Omega = \frac{Q^2 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta\right) d\Omega = \frac{Q^2 \omega^6}{2\pi c^5} (1 - \cos^4 \theta) d\Omega.$$

Пример 4.4 Прямоугольная рамка с постоянным линейным током J вращается вокруг своей диагонали с постоянной угловой скоростью ω . Площадь рамки равна S , а ее линейные размеры малы по сравнению с длиной излучаемой волны. Найти интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период вращения рамки (Задача №376 в [2]).



По определению магнитный момент рамки равен:

$$\boldsymbol{\mu}(t) = \frac{\mathcal{J}S}{c} \mathbf{n}'(t) = \frac{\mathcal{J}S}{c} (\mathbf{i} \cos \omega t + \mathbf{j} \sin \omega t + \mathbf{k}0).$$

Соответственно, вторая производная магнитного момента равна:

$$\ddot{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{\mathcal{J}S}{c} \omega^2 \mathbf{n}'(t).$$

Интенсивность dI излучения в телесный угол $d\Omega$ определяется формулой (39):

$$\text{Рис. 12} \\ dI = \frac{[[\ddot{\boldsymbol{\mu}}(\tau) \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega = \frac{1}{4\pi c^3} \frac{\mathcal{J}^2 S^2 \omega^4}{c^2} [[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 d\Omega,$$

где $\tau = t - r/c$.

$$[[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 = 1 - \cos^2(\omega\tau - \varphi) \sin^2 \theta.$$

Соответственно, среднее за период выражение имеет вид:

$$\langle [[\mathbf{n}' \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n}]^2 \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta).$$

Окончательно получаем:

$$\langle dI \rangle = \frac{\mathcal{J}^2 S^2 \omega^4}{8\pi c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega.$$

Пример 4.5 Квадрупольный момент Q тела вращения меняется со временем по закону $Q = Q_0 e^{-(t/T)^2}$, где Q_0 и T — постоянные. Найти энергию $d\mathcal{E}_{\text{н}\omega}$, излученную в телесный угол $d\Omega$ на частотах в интервале от ω до $\omega + d\omega$ за бесконечное время от $t = -\infty$ до $t = \infty$ (Задача №382 в [2]).

По определению, у тела вращения $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2}Q_{33}$, где $Q_{33} = Q$ — называется квадрупольным моментом. Таким образом, компоненты вектора $\ddot{\mathbf{Q}}$ равны

$$\ddot{\mathbf{Q}} \Rightarrow \left(-\frac{\ddot{Q}}{2} n_x, -\frac{\ddot{Q}}{2} n_y, \ddot{Q} n_z \right) = -\frac{1}{2} \ddot{Q} \mathbf{n} + \frac{3}{2} \ddot{Q} n_z \mathbf{k}.$$

Фурье компонента функции $Q(t)$ есть:

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} Q_0 e^{-t^2/T^2} dt = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} T e^{-\omega^2 T^2/4}.$$

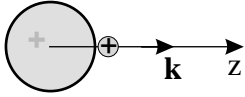
Соответственно $\ddot{\mathbf{Q}}(\omega) = i\omega^3 Q(\omega) \left(-\frac{1}{2} \mathbf{n} + \frac{3}{2} n_z \mathbf{k} \right)$. На основании (42)

$$\frac{d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega}}{d\Omega d\omega} = \frac{|\ddot{\mathbf{Q}}(\omega) \times \mathbf{n}|^2}{72\pi c^5}.$$

Окончательно получаем:

$$d\mathcal{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{Q_0^2 T^2 \omega^6}{256\pi c^5} e^{-\omega^2 T^2/2} \sin^2 2\theta d\Omega d\omega.$$

Пример 4.6 При распаде неподвижного ядра радиуса R образовалась α -частица со скоростью, равной нулю. Заряд α -частицы q , а ее радиус пренебрежимо мал по сравнению с R . В результате кулоновского отталкивания α -частица удалась на бесконечность. Найти угловое распределение $d\mathcal{E}$ полной энергии излучения с учетом малого слагаемого порядка $\frac{v}{c} \ll 1$, где v — скорость α -частицы на бесконечности. (Задача №383 в [2])



Магнитный момент такой системы равен нулю. Вычисляя тензор квадрупольного момента, получим:

$$Q_{xx} = -qz^2, \quad Q_{yy} = -qz^2, \quad Q_{zz} \equiv Q_0 = 2qz^2.$$

Рис. 13. Или в матричном виде:

$$Q_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{Q_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \ddot{Q}_{\alpha\beta} \Rightarrow -\frac{\ddot{Q}_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

С учетом определения компонент вектора \mathbf{Q} ($Q_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^3 Q_{\alpha\beta} n_\beta$) получим:

$$\ddot{\mathbf{Q}} = \ddot{Q} \mathbf{n} = (n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} - 2n_z \mathbf{k}) \left(-\frac{\ddot{Q}_0}{2} \right) = -\frac{\ddot{Q}_0}{2} (\mathbf{n} - 3n_z \mathbf{k}),$$

т.к. $n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} - 2n_z \mathbf{k} = \mathbf{n} - 3n_z \mathbf{k}$; \mathbf{n} — единичный вектор в направлении точки наблюдения, α -частица движется вдоль оси z (см. рис. 13). В результате

$$[\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] = \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}], \quad \ddot{\mathbf{d}} = q \ddot{\mathbf{r}} = \frac{Ze q^2}{m} \frac{1}{r^2} \mathbf{k}. \quad (52)$$

Энергия излучения α -частицы в рассматриваемом приближении внутрь телесного угла $d\Omega$ равна:

$$d\mathcal{E} = d\Omega \int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi c^3} \left([\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 + \frac{1}{3c} [\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}][\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] \right) dt. \quad (53)$$

Первое слагаемое в (53) имеет вид:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{4\pi c^3} [\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}]^2 dt = \frac{q^2}{15\pi R} \sqrt{\left(\frac{2Ze q}{mRc^2} \right)^3} \sin^2 \theta = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c} \right)^3 \sin^2 \theta.$$

С учетом (52) получим:

$$[\dot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}][\ddot{\mathbf{Q}} \times \mathbf{n}] = \frac{Ze q^2}{mr^2} \frac{3}{2} \ddot{Q}_0 n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2.$$

При этом

$$Q_0 = 2qz^2, \quad \dot{Q}_0 = 4qz\dot{z}, \quad \ddot{Q}_0 = 2q(2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z}), \quad \ddot{Q}_0 = 4q(3\dot{z}\ddot{z} + z\ddot{\ddot{z}}).$$

Соответственно из уравнения движения имеем следующие равенства:

$$\ddot{z} = \frac{1}{m} \frac{Ze q}{z^2} = \frac{\beta}{z^2}, \quad \ddot{\ddot{z}} = -\frac{2\beta}{z^3} \dot{z}, \quad \text{где } \beta = \frac{Ze q}{m}.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{z^2} (3\dot{z}\ddot{z} + z\ddot{\ddot{z}}) dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z} \frac{\beta}{z^2} - z \frac{2\beta}{z^3} \dot{z} \right) dt,$$

$$\text{так как } dt = \frac{dz}{\dot{z}}, \quad \text{то } \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2} \left(3\dot{z} \frac{\beta}{z^2} - z \frac{2\beta}{z^3} \dot{z} \right) dt = \beta \int_R^{\infty} \frac{dz}{z^4} = \frac{\beta}{3R^3}.$$

Таким образом, второе слагаемое в (53) равно:

$$\frac{1}{4\pi c^4} \frac{2Ze q^2}{m} \frac{Ze q}{m} \frac{1}{3R^3} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \left(\frac{v}{c} \right)^4 \frac{2}{16\pi} \frac{q^2}{3R} n_z [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2,$$

где использованы соотношения:

$$\frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{Ze q}{R}, \quad v_{\infty} = \sqrt{\frac{2Ze q}{mR}}, \quad n_z = \cos \theta, \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{n}]^2 = \sin^2 \theta.$$

Окончательно для углового распределения излучения получим:

$$d\mathcal{E} = \frac{q^2}{15\pi R} \left(\frac{v}{c} \right)^3 \left(1 + \frac{5}{8} \frac{v}{c} \cos \theta \right) \sin^2 \theta d\Omega.$$

Литература

1. Бредов М.М., Румянцев В.В., Топтыгин И.Н. Классическая электродинамика. М.: Наука, 1985. — 399 с.
2. Алексеев А.И. Сборник задач по классической электродинамике. М.: Наука, 1977. — 318 с.

Составители:

Запрягаев Сергей Александрович
Крыловецкий Александр Абрамович

Редактор:

Тихомирова О.А.