Лабораторная работа №6, Евгений Павлов, РЭ-22

Цель работы: изучение дифракции Френеля на круглом отверстии, щели и перехода к дифракции Фраунгофера; определение параметров отверстий различной формы при изучении распределения интенсивности дифрагирующих лучей.

Принадлежности: источник монохроматического когерентного излучения; набор препятствий различной формы, короткофокусная положительная линза, измерительная линейка, экран.

Краткая теория:

1.1. Дифракция Френеля на круглом отверстии

Первое упоминание о дифракционных явлениях появилось в работах Леонардо да Винчи (1452-1519 гг.). Однако впервые они были детально описаны в книге Гримальди, которая была опубликована в 1665 году. Существовавшая в тот период корпускулярная теория света не могла объяснить эти явления. Френель (1818 г.) с помощью теоремы Гюйгенса (построение вторичных волн) и принципа интерференции вторичных волн объяснил явление дифракции, следуя волновой природе света. Кирхгоф (1882 г.) придал исследованию Френеля математическое обоснование.

Пусть S (рис. 6.1) - мгновенное положение фронта сферической, монохроматической волны λ с радиусом α, которая распространяется от точечного источника O.

Наша задача - найти световое возмущение в точке P (напряженность электрического поля E_p). В соответствии с принципом Гюйгенса-Френеля каждый элемент волнового фронта S рассматривается как центр вторичных возмущений, которые распространяются в виде элементарных сферических волн.

Напряженность электрического поля на расстоянии a от точечного источника равна:

$$E_a \approx \frac{\exp\left[-i(\omega \cdot t - ka)\right]}{a}.$$

Элемент сферической поверхности площадью dS создает колебания в точке P:

$$dE_p \approx \frac{E_a k(\Psi) e^{ikr} dS}{r}.$$

Интегрируя по всей поверхности S, получим:

$$E = E_0 \frac{e^{-i(\omega \cdot t - k \cdot r)}}{a} \iint_S \frac{e^{ikr} \cdot k(\Psi) dS}{r},$$

E_0 - напряженность электрического поля, создаваемая точечным источником на расстоянии 1 метр; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число; $k(\Psi)$ -коэффициент дифракции, который принимает максимальное значение при $\Psi = 0$ и равен нулю при $\Psi \geq \frac{\pi}{2}$ (последнее выражает отсутствие обратной волны).

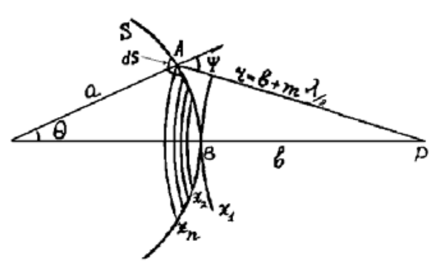

Рисунок 6.1. Построение зон Френеля

В общем случае определить интеграл (6.1) - не простая задача. Однако для некоторых случаев (круглое отверстие в непрозрачном экране, круглое препятствие) можно воспользоваться так называемыми "зонами Френеля", которые получаются путем сечения сфер с центром в точке P и радиусами $b+\frac{\lambda}{2},...,b+\frac{m\lambda}{2}$ с волновым фронтом S (см.рис.6.1). Следует отметить, что возмущения, приходящие от соседних зон, имеют противоположные фазы. Кроме того, в рамках одной зоны Френеля можно считать, что $k(\phi)$ является константой - k_m, а площади зон Френеля одинаковы и равны:

$$\sigma_m = \frac{\pi \cdot a \cdot b}{a+b} \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (6.2)$$

значений m радиус отверстия (препятствия), открывающего (закрывающего) первые m зон, равен:

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda} \qquad (6.3)$$

Несложно показать, что если отверстие открывает для точки P целое число зон Френеля, то напряженность электрического поля равна

$$E_{mp} = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_m, \qquad (6.4)$$

где E_1 - возмущение в P от первой зоны Френеля;

E_m - от $m-ой$ зоны Френеля; плюс соответствует нечетному, а минус - четному числу зон Френеля m.

Результат (6.4) удобно интерпретировать с помощью векторной диаграммы (на комплексной плос кости вектор характеризуется амплитудой и фазой) (см. рис. 6.2).

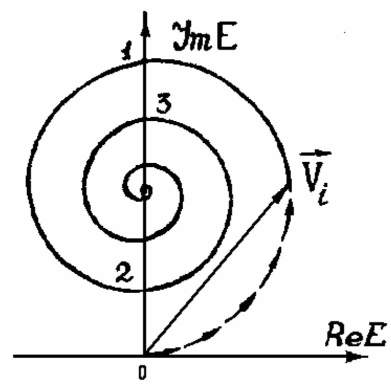

Рис. 6.2. Векторная диаграмма.

Каждый элементарный вектор V_i соответствует результирующему колебанию электрического поля от кольцевой поверхности на волновой поверхности S источника излучения и рассматриваемую точку P (см. рис. 6.1). Точки 1,2,3 относятся к периферийным точкам одной, двух или трех зон Френеля для P. Тогда электрическое поле в точке P для одной, двух и большего числа зон Френеля будет равно величине вектора, соединяющего точку O с соответствующими точками 1, 2, 3 и т.д. С увеличением номера зоны Френеля (это приводит к увеличению угла дифракции φ) $k(\Psi)$ монотонно уменьшается, что приводит к уменьшению величины E_m. Поскольку $E_m \to 0$ при $m \to \infty$, то векторная диаграмма (см. рис. 6.2) представляет закручивающуюся спираль. С помощью такой диаграммы легко объяснить характер поведения интенсивности излучения в точке P (интенсивность $I \sim (EE')$) для малого значения m при увеличении радиуса отверстия или уменьшения величины b. На рисунке 6.3 представлена зависимость относительной интенсивности света ($\frac{I}{I_0}$, где $I_0 \sim \frac{E_0 T_0}{(a+b)^2}$) от расстояния b (т.е. от количества открытых зон Френеля). Значение b_1 соответствует одной открытой зоне Френеля при заданных a, r_0, λ, где r_0 - радиус отверстия в непрозрачном экране.

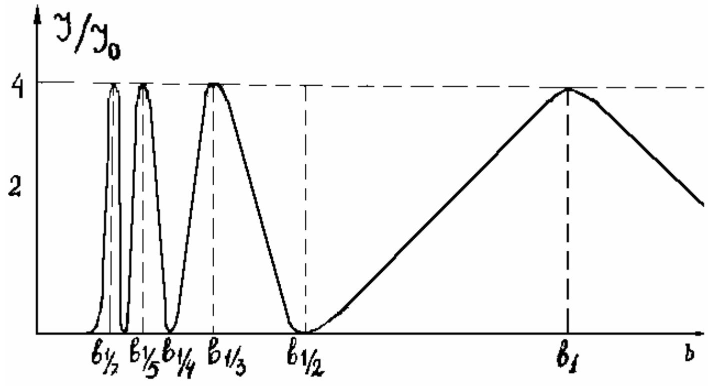

Рис.6.3. Зависимость относительной интенсивности от количества открытых зон Френеля

2.2. Дифракция Френеля на щели

Аналогичные рассуждения можно провести при наличии узкой щели в непрозрачном экране. В этом случае число зон Френеля определяется из соотношения (6.3), если под r_m понимать полуширину щели.

Точный расчет распределения интенсивности в обоих случаях (особенно расчет интенсивности вне точки P) представляет собой сложную задачу. По этой причине выше излагается приближенный метод вычисления интенсивности только для точки P с помощью построения зон Френеля. Отметим, что дифракционная картина для круглого отверстия представляет собой чередующиеся светлые и темные кольца, для щели - светлые и темные полосы (параллельные расположению щели), при этом в центре этой картины в зависимости от четности количества открытых зон Френеля в соответствии с (6.4) будет минимум (m - четное) или максимум (m - нечетное).

2.3. Дифракция Фраунгофера

Следуя выражению (6.3) и рисункам 6.2 и 6.3, чередование максимумов и минимумов интенсивности в точке Р будет происходить при условии, когда радиус отверстия отвечает условию

$$r_0 > \sqrt{\lambda \cdot f}, \text{ где } \quad f = \frac{a \cdot b}{a+b}$$

Это чередование исчезает при выполнении условия

$$r_0 < \sqrt{\lambda \cdot f}, \qquad (6.5)$$

которое является критерием перехода от дифракции Френеля к дифракции Фраунгофера. При этом закономерности, отмеченные выше, не выполняются.

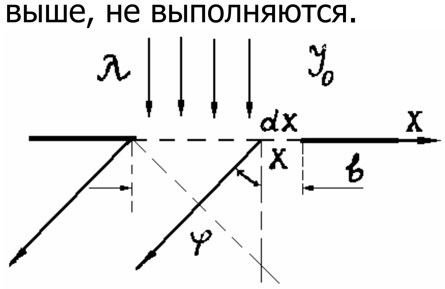

Рисунок 6.4. Дифракция Фраунгофера на щели.

Предельным случаем дифракции Фраунгофера является дифракция в параллельных лучах. Расчет зависимости интенсивности I_φ от угла дифракции можно произвести, используя рисунок 6.4. Элемент щели dx, который находится на расстоянии X от точки O, возбуждает в направлении угла φ колебание dE_φ. В соответствии с рисунком 6.4 и принципом Гюйгенса-Френеля для dE_φ можно записать следующее выражение:

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} dx e^{i(\omega \cdot t - kx \cdot \sin\varphi)} \tag{6.6}$$

где $\sqrt{I_0} \sim E_0$ - амплитуда колебаний электрического поля волны, $k = \frac{2\pi}{l}$ - волновое число плоской волны. Проинтегрируем выражение (6.6) по всей щели:

$$E_\varphi = \frac{E_0}{b}\int_{0-}^{b} \exp\left[i\left(\omega \cdot t - rx\sin\varphi\right)\right]dx = E_0 \exp\left[i\left(\omega \cdot t - \frac{kb\sin\varphi}{2}\right)\right] \times \frac{\sin\frac{kb\sin\varphi}{2}}{\frac{kb\sin\varphi}{2}} \tag{6.7}$$

Для интенсивности I_φ, учитывая (6,7),получим:

$$I_\varphi \sim E_\varphi E_\varphi^* = E_0^2 \cdot \frac{\sin^2\frac{kb\sin\varphi}{2}}{\left(\frac{kb\sin\varphi}{2}\right)^2} = E_0^2\frac{\sin^2 u}{u^2}. \tag{6.8}$$

Анализируя выражение (6.8), легко получить условие минимума интенсивности

$$b\sin\varphi = m\lambda. \tag{6.9}$$

Для максимума функции (6.8) получим трансцендентное уравнение типа $tgu = u$, корни решения которого равны:

$$b\sin\varphi = 0, \pm 1.43\lambda, \pm 2.46\lambda, \pm 3.47\lambda \tag{6.10}$$

Для прямоугольного отверстия самостоятельно провести вывод распределения интенсивности для угла дифракции:

$$I\ (\varphi, \Psi) = E_0^2 \cdot \frac{\sin^2\frac{kb_x\sin\varphi}{2}}{\left(\frac{kb_x\sin\varphi}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\frac{kb_y\sin\psi}{2}}{\left(\frac{kb_y\sin\psi}{2}\right)^2}, \tag{6.11}$$

где b_x и b_y - параметры прямоугольного отверстия.

Графическая зависимость I_φ от угла дифракции представлена на рисунке 6.5.

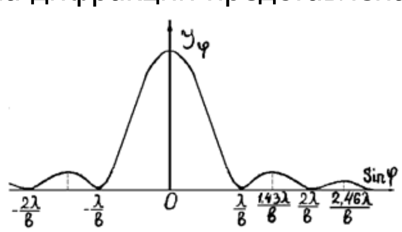

Рис.6.5. Распределение интенсивности I_φ для дифракции

Распределения интенсивности для угла дифракции:

$$I\left(\varphi,\Psi\right)=E_0^2\cdot\frac{\sin^2\dfrac{kb_x\sin\varphi}{2}}{\left(\dfrac{kb_x\sin\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\sin^2\dfrac{kb_y\sin\psi}{2}}{\left(\dfrac{kb_y\sin\psi}{2}\right)^2},\tag{6.11}$$

где b_x и b_y - параметры прямоугольного отверстия.

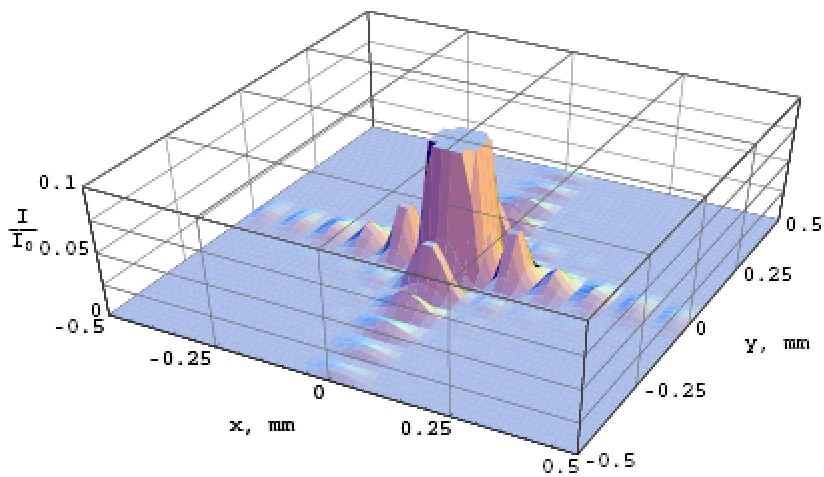

Рисунок 6.5′

3. Описание экспериментальной установки

Схема установки для наблюдения дифракции Френеля на круглом отверстии и щели приведена на рисунке 6.6.

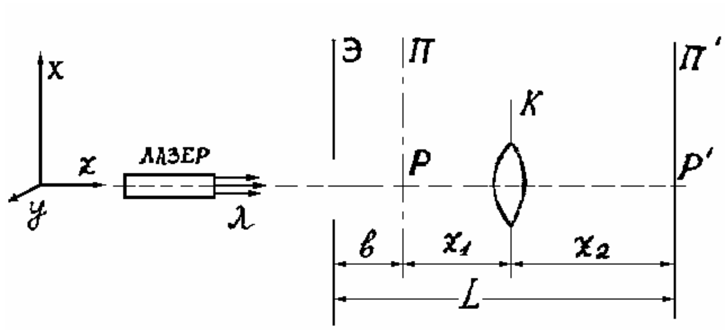

Рис.6.6. Схема экспериментальной установки для дифракции Френеля.

Свет от гелий-неонового лазера (плоская волна с λ = 6328 А) падет на экран Э с круглым отверстием радиуса r_0 или с регулируемой щелью. Дифракционная картина, в соответствии со значениями λ, a, b, r_0 должна находиться в плоскости П. Поскольку размеры дифракционной картины малы, что затрудняет ее исследование, то с помощью короткофокусной линзы К (F_K = 20 мм) она увеличивается на плоскость П'. Для рассматриваемой установки соотношение (6.3) преобразуется к виду:

$$r_m=\sqrt{m\lambda b}\tag{6.12}$$

Расстояние b определяется из формулы тонкой линзы и рисунка 6.6.

$$\begin{cases} b = L(z_1 + z_2) \\ \dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{F_K} - \dfrac{1}{z_2} \end{cases} \tag{6.13}$$

Если при неизменном радиусе отверстия r_0 перемещать экран Э, то число зон Френеля для точки Р будет изменяться по закону

$$m = \frac{r^2}{b_m \lambda} \tag{6.14}$$

Интенсивность в точке Р при различных значениях b будет изменяться в соответствии с графиком, представленным на рисунке 6.3. Отметим, что исследовать зависимость (6.13) следует с определения b_2 (для двух зон Френеля в точке Р будет минимум), которое равно половине b_1 (см. рис. 6.3). Аналогично следует действовать и при исследовании дифракции Френеля на щели.

Для наблюдения дифракции Фраунгофера можно воспользоваться схемой, приведенной на рисунке 6.6. Однако необходимо выполнение соотношения (6.5). Если взять $z_2 = 1м$, $\lambda = 0.6328мкм$, то $r_1 \approx 0.8мм$. Следовательно, при $r_1 < 0.8мм$ выполняется условие (6.5).

Если использовать отверстие прямоугольной формы (a_x, a_y - размеры отверстия вдоль x и y), то для проверки соотношения (6.11) необходимо измерить распределение интенсивности вдоль x и y. Тогда углы дифракции определяются (с учетом увеличения изображения конденсатором К) следующими соотношениями:

$$\varphi = \frac{X}{b}\frac{z_1}{z_2}; \Psi = \frac{y}{b}\frac{z_1}{z_2} \tag{6.15}$$

Выполнение работы:

4.1 Исследование дифракции Френеля на круглом отверстии

Установили на пути лазерного луча приспособление, позволяющее перемещать экран с круглым отверстием относительно линзы К (см. рис. 6.6). Затем включили лазер и получили дифракционную картину на экране П', который расположили на расстоянии $z_2 = 1$ м от линзы К.

Перемещая экран Э относительно линзы К, определили значение b_2, при котором открыто две зоны Френеля относительно точки Р. Учитывая, что $b_2 = \frac{1}{2}b_1$, мы определили и b_1. Приближая экран Э к линзе К, определяли b_m по чередующимся максимумам и минимумам в соответствии с выражениями (6.13) и рис. 6.3 (см. таблицу с данными). Используя данные b_m для соответствующих значений m, построили график зависимости $b_m = f(m)$ (см. график 1).

Полученные данные

	b_1, мм	b_2, мм	b_3, мм	b_4, мм	b_5, мм	b_6, мм
1	232	116	72	50	38	31
2	232	116	71	50	39	29
3	230	115	73	51	38	29
4	232	116	71	50	39	30
5	234	117	72	50	38	29

По полученным данным определили средние значения:

$b_{1ср}$, мм	$b_{2ср}$, мм	$b_{3ср}$, мм	$b_{4ср}$, мм	$b_{5ср}$, мм	$b_{6ср}$, мм
232	116	71.8	50.2	38.4	29.6

Погрешности

Δ_{b1}, мм	Δ_{b2}, мм	Δ_{b3}, мм	Δ_{b4}, мм	Δ_{b5}, мм	Δ_{b6}, мм
5.3	3.4	3.6	3.0	1.0	2.6

График

Способ 1

На основе полученных средних значений построили зависимость m от b, а с помощью кубической сплайн-интерполяции интерполировали точки для получения кривой, по которой в последствии можно определить угол наклона.

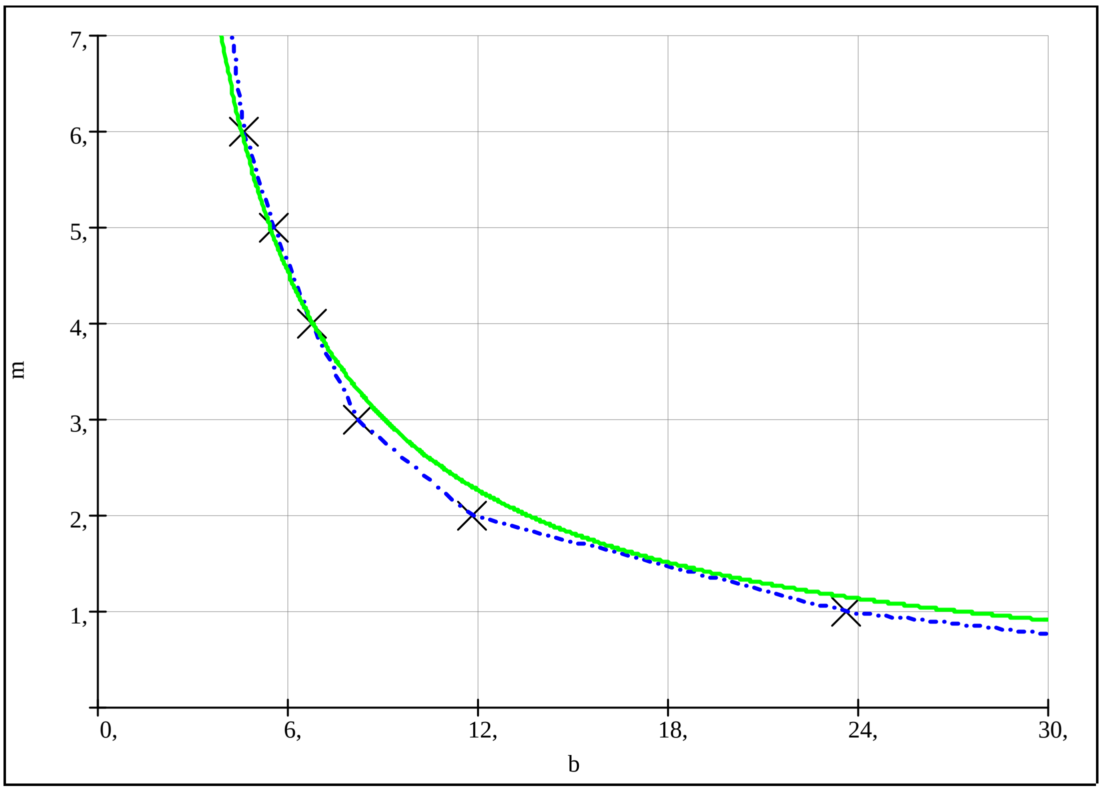

График 1. Зависимость $m \sim \dfrac{1}{b_m}$

Зависимость имеет вид

$$m \sim \frac{A}{b_m}$$

Следовательно, нам необходимо определить A. Тангенс угла наклона измерялся на участке (по оси m) от 0 до 1.

$$\tan\alpha = \frac{335-232}{1-0}, \ A = 206 \text{ мм}$$

На графике 1 построена эта кривая

$$m = \frac{206}{b_m}$$

По этим данным можно определить радиус круглого отверстия

$$A = \frac{r_0^2}{\lambda}, \; r_0 = \sqrt{A \cdot \lambda}$$

По этой формуле определён радиус круглого отверстия (известно, что λ = 632,8 нм):

r_0 = 0.361 мм

Но можно воспользоваться и другим способом определения A.

<u>Способ 2</u>

Построим зависимость b от $\frac{1}{m}$ (график 1′), а затем проведём аппроксимирующую прямую, у которой определим тангенс угла наклона A′. Причём

$$A = \frac{1}{A'}$$

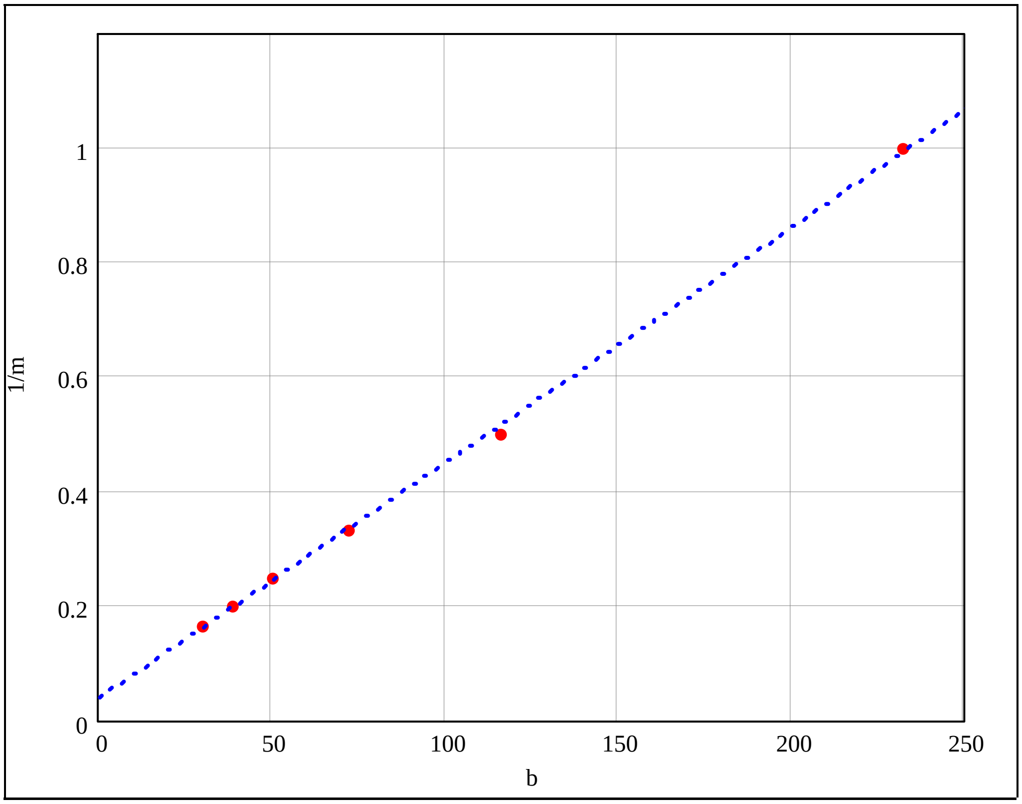

График 1′. Зависимость b от $\frac{1}{m}$

Уравнение аппроксимирующей прямой – y(x) = 0.04 + 0.00411 x, следовательно тангенс угла наклона (а значит и A′) равен

$$A' = 0.00411, \; A = \frac{1}{A'} = 243.3 \text{ мм}$$

По этому значению определили радиус круглого отверстия:

r_0 = 0.392 мм

4.2. Исследование дифракции Френеля на щели

Сначала составили оптическую схему, как представлено на рис.6.6, где Э - экран с регулируемой щелью, К - держатель с короткофокусной линзой. Потом при фиксированном значении *b* (см. рис. 6.6), изменяли ширину щели, наблюдая чередование максимумов и минимумов в центре дифракционной картины.

В этом пункте необходимо было определить длину волны излучения квантового генератора λ. Для этого, измеряя ширину щели $2r$, определили значение для максимумов и минимумов m-х порядков, начиная со второго (см. таблицу с данными). Затем построили график зависимости $r_m = f(\sqrt{m})$ (см. график 2), по которому и определили длину волны.

Полученные данные

Ширина щели

$2r_2$, мм	0.616	0.615	0.618	0.612	0.616
$2r_3$, мм	0.755	0.750	0.754	0.757	0.756
$2r_4$, мм	0.872	0.873	0.871	0.874	0.880

Значение b

b, мм	75.0	76.0	75.0

Погрешности измерений

Для ширины щели ($t_{\alpha n}$ = 4.3, α = 0.95)

	$2r_2$, мм	$2r_3$, мм	$2r_4$, мм
ср	0.615	0.754	0.874
Δ	0.0047	0.0078	0.0066

$2r_2$ = 0.615 ± 0.005 мм, $2r_3$ = 0.754 ± 0.008 мм, $2r_4$ = 0.874 ± 0.007 мм

Для b ($t_{\alpha n}$ = 4.3, α = 0.95) $b_{ср}$ = 75.3, Δ = 1.4

b = 75.3 ± 1.4 мм

График

По полученным данным построили график зависимости $r \sim \sqrt{m}$ и определили тангенс угла наклона аппроксимирующей прямой.

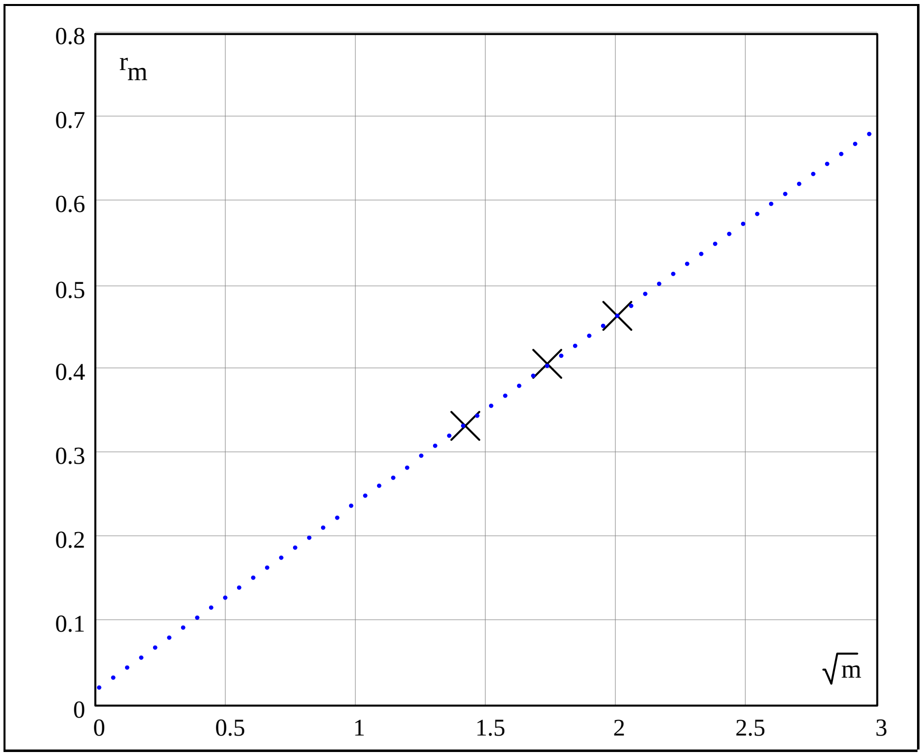

График 2. Зависимость $r \sim \sqrt{m}$

Прямая y(x) = -0.00457 + 0.221·x

Следовательно, в выражении

$$r = A\sqrt{m}$$

A = 0.221, а отсюда уже можно определить и длину волны.

$$r = \sqrt{b\lambda m}\,,\ A = \sqrt{b\lambda}\,,\ \lambda = \frac{A^2}{b}$$

Откуда длина волны равна

λ = 648.6 нм

4.3. <u>Изучение дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии</u>

Между источником света (лазером) и экраном П' поместили экран с прямоугольным отверстием на расстоянии <u>1 метра</u> от П'.

L = 1 м

Для точности измерения сфотографировали дифракционную картину (рисунки 1, 2 и 3), а затем с помощью программных средств CorelDraw перевели в чёткое изображение (рисунок 4), чтобы впоследствии определить минимальные значения интенсивности вдоль X и Y.

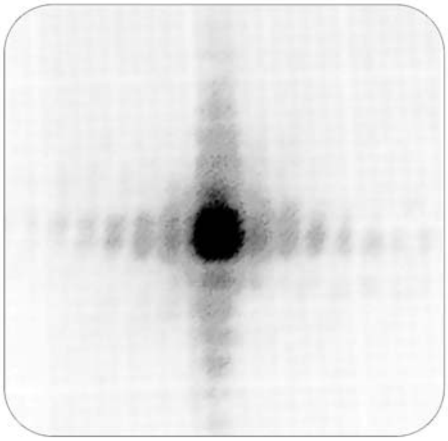

Рисунок 1

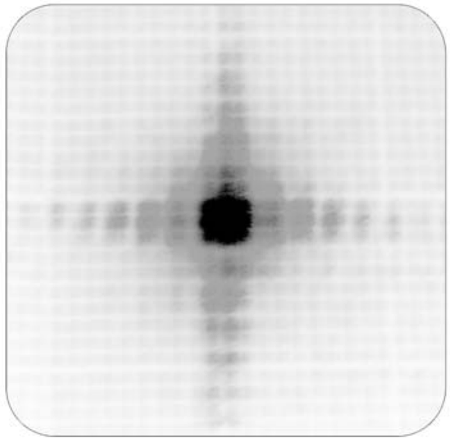

Рисунок 2

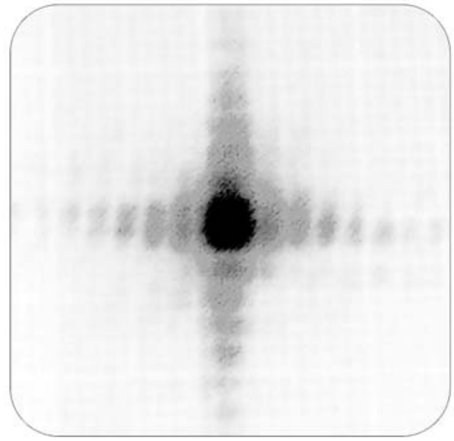

Рисунок 3

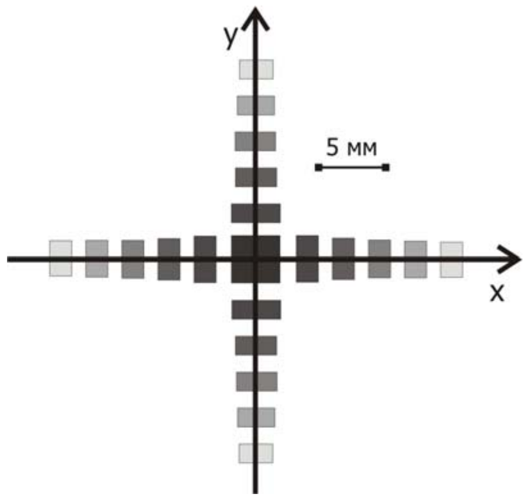

Рисунок 4

Полученные данные

Вдоль оси X

m	1	2	3	4	5	6
x, мм	2	4	5	7	9	11

Вдоль оси Y

m	1	2	3	4	5	6
y, мм	3	4	6	7	10	12

Обработанные результаты

sin φ	0.002	0.004	0.005	0.007	0.009	0.011
b_x, м	0.00032	0.00032	0.00038	0.00036	0.00035	0.00035

sin ψ	0.003	0.004	0.006	0.007	0.01	0.012
b_y, м	0.00021	0.00032	0.00032	0.00036	0.00032	0.00032

Погрешности

Погрешности размеров щели определяются как косвенные измерения, учитывая, что точность измерения расстояний составляет 0.5 мм.

E для X

%	0.25	0.125	0.1	0.071	0.056	0.045

E для Y

%	0.167	0.125	0.083	0.071	0.05	0.042

Δ для b_x

мм	$7.91\cdot10^{-5}$	$3.955\cdot10^{-5}$	$3.797\cdot10^{-5}$	$2.583\cdot10^{-5}$	$1.953\cdot10^{-5}$	$1.569\cdot10^{-5}$

Δ = 0.00004 м

Δ для b_y

$3.516\cdot10^{-5}$	$3.955\cdot10^{-5}$	$2.637\cdot10^{-5}$	$2.583\cdot10^{-5}$	$1.582\cdot10^{-5}$	$1.318\cdot10^{-5}$

Δ = 0.00003 м

b_x = 0.00034 ± 0.00004 м
b_y = 0.00031 ± 0.00003 м

<u>Вывод</u>:
В данной работе изучили дифракции Френеля на круглом отверстии, щели и перехода к дифракции Фраунгофера. Познакомились с основными принципами получения дифракционной картины. А также определили параметры отверстий различной формы:

- r_0 = 0.361 мм
- b_x = 0.00034 ± 0.00004 м, b_y = 0.00031 ± 0.00003 м

Определили длину волны в дифракции Френеля на щели

- λ = 648.6 нм